

## Model Selection for Estimating Portfolio VaR in Korean Stock Market\*

Sang Jin Lee\*\*

*Korean Financial Supervisory Service, Seoul, Korea*

Ki Beom Binh

*Korea Securities Research Institute, Seoul, Korea*

Received 04 February 2008; Accepted 15 July 2008

### Abstract

Value-at-Risk (VaR) is the most popular methodology in risk management because it is easy accessibility to common users. The importance of VaR is rapidly increasing because the international agreement in banking industry, the Basel Accord, uses the VaR methodology extensively.

However, Bedder (1995) and Hendricks (1996) warned of limitations of the VaR approach in risk management; the VaR methodology requires distributional assumptions for the relevant risk factors. Moreover, the VaR estimate depends on not only the assets class constituting portfolio, but also the model used to estimate the volatility of those assets. In this regard, it is valuable to investigate which volatility model produces superior risk measurement for a given portfolio.

In this study we seek to determine the best among various models in estimating 99% VaR and 99.5% VaR for the long and short position of a portfolio in the Korean stock market. Models are evaluated in terms of both the accuracy of probability and the independence of extreme events occurrence. We use the conditional coverage test proposed by Christoffersen (1998) to test those properties jointly.

We compare five univariate models and three multivariate models using the hypothetical portfolio consisting of twenty stocks whose market values rank in the top 20th in the Korean stock market; the five univariate models are the Simple Moving Average (SMA) model, the Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) model, the GARCH model with a normal distribution, the GARCH model with a *t*-distribution, and the Historical

---

\* We would like to thank Dr. Young Ki Kim, Kyu Chul Choi, Kwang Sik Kim, Dr. Suk Hyung Lee, Dr. Tae Hyung Kim, Dr. Tim Krehbiel, Dr. B. Wade Brorsen and two anonymous referees. This paper is irrelevant to the official views of Korean Financial Supervisory Service and Korea Securities Research Institute. All remaining errors are our own.

\*\* Corresponding Author. Address: Korean Financial Supervisory Service, 27 Yoido-dong, Youngdeungpo-gu, Seoul 150-743, Korea; E-mail: [legendar@fss.or.kr](mailto:legendar@fss.or.kr); Tel: +82-2-3786-8228; Fax: +82-2-3786-8258.

Simulation (HS) model. The three multivariate GARCH models are the Constant Conditional Correlation (CCC) model, the Dynamic Conditional Correlation (DCC) model, and the Orthogonal GARCH (O-GARCH) model.

We can summarize our analysis of empirical results as follows. First, we find that the overall performances of multivariate models are better than those of univariate models in evaluating VaR for the our hypothetical portfolio. Second, the performance of the DCC model is better than that of the other multivariate models such as the CCC model and the O-GARCH model. However, the CCC model as well as the DCC model passes conditional coverage tests for many cases. Third, the SMA model and the HS model, the most commonly used models in Korean financial institutes, fail to pass the tests. This means those models are relatively less appropriate in evaluating VaR for a portfolio similar to our portfolio with respect to the conditional coverage perspective. This might be caused by the fact that those models fail to efficiently incorporate new information into the VaR evaluation.

This paper is organized as follows: we review the VaR concepts, which is followed by a review of the various methods to evaluate VaR. After that, we move to the back-testing procedure for the model selection criteria. The empirical result of the models is presented and discussed. Then, we summarize and conclude our research results.

This paper is different from existing studies in terms of the number of assets in the portfolio and models. Most of prior research has used a portfolio consisting of two, three, or at most, five stocks. However, in this paper we use a hypothetical portfolio consisting of 20 stocks to test the performances of the multivariate models. In addition, we compare the multivariate VaR methods with the univariate VaR methods in the literature. Especially, we apply the CCC model and the DCC model to evaluate VaR. Overall, the most distinctive point of this paper is the result of this comparison, which allows us to determine the value of conditional correlation estimation in this VaR application.

*Keywords:* VaR; CCC model; DCC model; O-GARCH model; Conditional coverage test

## 단일변량모형과 다변량모형의 포트폴리오 VaR 측정 성과\*

이 상 진 (금융감독원)\*\*

빈 기 범 (한국증권연구원)

### < 요약 >

이 논문에서는 포트폴리오의 매도·매수 포지션에서 VaR 측정을 위해 사용되는 기존의 다양한 모형의 적합성을 비교·분석한다. VaR 측정 모형으로는 SMA 모형, EWMA 모형, GARCH- $n$  모형, GARCH- $t$  모형 및 비모수 모형인 HS 등 5개의 단일변량모형과, CCC 모형, DCC 모형과 O-GARCH 모형 등 3개의 다변량모형을 고려하였다.

모형의 VaR 측정 적합성을 비교하기 위한 기준으로는 ① 극단적인 사건을 잘 예측하는 성질인 '비조건부적 위험흡수성'과 ② 예외사항과 비예외사항간 독립적 실현을 의미하는 '독립성'을 사용하였다. 이러한 성질을 동시에 결합 검정하기 위해 Christoffersen(1998)의 '조건부적 위험흡수성 검정'을 적용하였다.

한국 유가증권시장 시가총액 상위 종목으로 구성되는 가상적 포트폴리오에 대한 각 모형별 VaR 측정 및 성과 검증 결과, 비조건부적 위험흡수성 및 독립성의 기준을 종합적으로 고려한다면 다변량모형인 DCC 모형과 CCC 모형이 VaR 측정에서 우수하며, 이 두 모형 중 DCC 모형이 견고하게 더욱 나은 성과를 나타냈다.

핵심 단어: VaR, CCC 모형, DCC 모형, O-GARCH 모형, 조건부적 위험흡수성 검정

\* 본 논문에 대해 유익한 논평 및 조언을 주신 금융감독원의 김영기 박사, 최규철 팀장, 김광식 팀장, 대우증권의 이석형 박사, 대한생명 경제연구소의 김태형 박사, Oklahoma State University의 Tim Krehbiel 교수, B. Wade Brorsen 교수 및 2명의 익명 심사자에게 감사드린다. 본 논문은 저자들 소속 기관의 공식 견해와 무관하며, 남아 있는 오류가 있다면 전적으로 저자들의 책임이다.

\*\* 연락담당 저자. 주소: 금융감독원 선입조사역, 서울 영등포구 여의도동 27번지 금융감독원, 150-743; E-mail: legendar@fss.or.kr; Tel: 02)3786-8228; Fax: 02)3786-8258.

투고일 2008-02-04; 게재확정일 2008-07-15

## 1. 서론

VaR(Value-at-Risk)은 이해하기 쉬우며 의미전달이 명확하기 때문에 위험관리(risk management) 분야에서 주요 방법론 및 지표로 활용된다. VaR은 BIS 협약에서 국제적 기준으로 준용됨으로써 그 중요성이 더욱 증대되고 있다. 시장위험을 관리하기 위해 BIS 협약은 내부모형법(internal model approach)으로 VaR에 근거한 방법론을 도입하고 있으며, 이 협약은 G-10 국가를 비롯한 여러 선진국에서 이용되고 있다.

Jorion(2000)은 'VaR을 주어진 신뢰수준(confidence level)하에서 목표기간(target horizon)동안 발생가능한 최대 손실에 대한 요약'이라고 직관적으로 정의했다. 예를 들어, 어떤 금융기관의 위험관리자가 95% 신뢰수준으로 10일-VaR이 100억 원이라고 했다면, 이는 정상적인 시장 상황에서 향후 10일 동안 95% 확률로 최대 손실이 100억 원이라는 것을 의미한다. 다시 말해 향후 10일 동안 100억 원 이상의 손실이 날 확률이 5%임을 의미한다.

VaR 방법론에서는 VaR 추정치가 포트폴리오의 위험요인(risk factor)의 분포에 대한 가정, 포트폴리오의 종류, 포트폴리오에 대한 포지션 및 VaR 측정에 사용된 모형에 따라 달라진다. Bedder(1995)는 3가지 가상 포트폴리오에 대하여 8개 모형에 의한 VaR 추정 성과를 비교하였다. 그는 VaR 방법론이 위험관리에 있어 매우 효과적임을 확인하였으나, 그 추정치가 자료의 대상기간, 분포에 대한 가정 등에 따라 달라지는 등 일관성이 결여되어 있다는 점을 지적했다. Hendricks(1996)는 8가지 외환시장 자료를 이용하여 모의실험 방법론을 통해 12개 모형에 의해 계산되는 VaR을 비교하였으며, 모든 모형들이 위험을 적절히 예측한다고 결론지었다. 하지만, 그도 역시 서로 다른 모형간 VaR 측정이 상당히 상이하다는 점을 지적하였다. 이러한 점에서 특정 포트폴리오의 VaR 측정을 위한 다양한 모형들을 비교하여 이 중 우수한 모형을 선택하는 것은 해당 포트폴리오와 유사한 자산을 보유하고 있는 금융기관 등의 관심이 대상이 될 뿐만 아니라 학술적으로도 연구 가치가 있다.

Sarma et al.(2003)은 미국 S&P500 지수와 인도 NSE50 지수에 대한 VaR 모형간 비교 연구를 수행하였다. 2단계 모형 선택 과정을 통해 단일변량모형인 SMA 모형(simple moving average model), EWMA 모형(exponentially weighted moving average model), GARCH 모형, 그리고 HS(historical simulation) 방법을 비교하였다. 그는 EWMA 모형이 분석 대상 지수의 VaR을 가장 잘 측정한다고 결론지었다. Angelidis and Benos(2004)는 다양한 포트폴리오에 대해서 단일변량모형인 EWMA 모형, GARCH 모형, T-GARCH 모형(threshold GARCH model) 및 극치 이론(extreme value theory: EVT) 모형을 비교하였다. 그들은 포트폴리오에 따라서 VaR을 잘 측정하는 모형이 다

르다고 보고하고 있다.

국내 연구로서 한상범(1999)은 KOSPI 지수, 원/달러 환율 및 엔/달러 환율을 대상으로 극치분포 모형을 이용하여 VaR을 측정하였으며, 표본내·외 성과 분석을 통해 평가한 결과 극치분포가 VaR 측정에 있어 유용성이 있음을 발견하였다. 이준행(2000)은 KOSPI 지수에 대해서 SMA 모형, EWMA 모형, HS를 이용하여 VaR를 측정하였으며, 사후검증(back-testing) 및 우도비 검정(likelihood ratio test)을 통해 VaR 측정 모형으로서의 적정성을 비교하였다. 그는 EWMA 모형이 KOSPI 지수의 VaR을 측정하는 모형으로 유용함을 발견하였다. 조담(2004)은 KOSPI200 지수를 대상으로 EWMA 모형, HS, GARCH(1, 1) 모형을 이용한 VaR 측정 결과에 대해서 우도비 검정을 통해 성과를 비교하였다. 그 결과 외환위기 이후 시기에만 EWMA 모형과 HS가 우수한 것으로 나타났다.

다변량모형과 관련하여 Bauwens et al.(2004)에 의하면 포트폴리오 VaR을 측정할 때 다변량모형은 단일변량모형에 비해서 몇 가지 장점이 있다. 우선 포트폴리오 편입 종목의 비중 변동이 잦은 경우 다변량모형을 사용한다면 계산이 좀 더 간편해진다. 단일변량모형을 사용하면 포트폴리오의 가중치가 변할 때마다 포트폴리오의 표준편차를 새롭게 계산해야 하지만, 다변량모형을 사용하는 경우는 이미 산출한 포트폴리오 구성 종목의 분산-공분산 행렬에 변화된 가중치 벡터를 앞뒤로 적절히 곱하여 쉽게 포트폴리오의 분산 및 표준편차를 구할 수 있다.

아울러 다변량모형은 포트폴리오를 구성하는 개별 자산간 ‘동적 상관관계(dynamic correlation)’를 고려하기 때문에 포트폴리오 분산을 보다 정확하게 구할 가능성이 높아진다. Longin and Solnik(1995)에 따르면, 시장변동성과 시장내 각 종목간 공분산(또는 상관관계)는 서로 양의 관계에 있다. 이 때 포트폴리오 구성 종목간 동적 공분산을 고려하면, 종목간 공분산이 급격히 변화하는 시기에 시장 상황을 잘 반영하여 더욱 정확한 포트폴리오의 분산을 구할 수 있다. 따라서 특정 포트폴리오에 대해서 다변량모형과 단일변량모형에 의한 VaR 측정 결과를 비교하는 것은 흥미로운 연구 대상이다.

다변량모형을 포함한 VaR 측정에 관한 기존 해외연구는 다음과 같다. Manfredo and Leuthod(1999)는 농업회사의 농축산물 포트폴리오 VaR 측정에 있어 단일변량모형으로 SMA 모형, EWMA 모형, GARCH 모형, 내재변동성 모형, 그리고 HS 및 다변량모형으로서 CCC(constant conditional correlation) 모형을 비교하였다. 그들은 HS와 EWMA 모형이 다른 모형에 비해서 우수하다고 결론지었다. Brooks and Persaud(2000)는 아시아 5개 시장 주식으로 구성된 포트폴리오에 대한 VaR 측정에서 HS, RiskMetrics 모형, 수정된 RiskMetrics 모형, 그리고 다변량 GARCH(1, 1) 모형을 비교하여 다변량 GARCH(1, 1) 모형이 우수함을 발견하였다. Engle(2002)은 BEKK 모형, DCC(dynamic conditional correlation) 모형, 그리고 O-GARCH(orthogonal GARCH) 모형, 다변량 SMA

모형, 그리고 다변량 EWMA 모형 등을 비교하여 전체적으로 DCC 모형이 우수하다고 주장하였다. Rombouts and Verbeek(2004)은 주어진 VaR 한도내에서 포트폴리오내 자산배분시 준모수적 GARCH 모형의 유용성을 검증하였다. 그들은 또한 S&P500 지수와 NASDAQ 지수의 일별수익률을 이용하여 DVEC 모형(diagonal vector error correction model), Engle(2002)의 DCC 모형과 Tse and Tsui(2002)의 DCC 모형 등 다변량 GARCH 모형을 비교하였다.

다변량모형과 관련한 국내 기존 연구로 이근영(2006)은 KOSPI와 회사채를 결합한 포트폴리오에 대해서 분산-공분산 모형, HS, EWMA 모형, 극치분포 모형을 이용하여 VaR을 측정하였으며, 표본내·외 성과 분석을 통해 평가한 결과 분산-공분산 모형의 표본외 성과가 표본크기에 의한 영향을 가장 적게 받는 것을 발견하였다.

본 논문에서는 사후검증을 통해 모형의 VaR 측정 적합성을 검증하는 통계적 방법론으로 Christoffersen(1998)의 ‘조건부적 위험흡수성 검정(conditional coverage test)’를 준용한다. 이는 기존 VaR 측정 성과 평가에 자주 사용되어 오던 ‘비조건부적 위험흡수성(unconditional coverage property)’ 여부를 검증하는 Kupiec(1995) 검정을 개선하고, 이것과 실제 손실의 VaR 초과 사건의 ‘독립성(independence property)’ 여부를 결합적으로 검증하는 매우 유용한 방법론이다. 국내 연구 중 문성주 외 3인(2003)도 이를 이용하여 극단치 이론에 근거한 VaR 측정의 적정성을 검증하였다.

본 연구에서는 CCC 모형, DCC 모형, O-GARCH 모형과 같은 다변량모형과 앞서 언급한 다양한 단일변량모형 중 어떤 모형이 VaR 측정에 유용한가를 평가한다. 기존 국내 연구는 주로 단일변량모형 위주로 VaR 측정 성과를 보고하고 있다. 또한, 모형의 VaR 측정 성과 평가에서 무조건부적 위험흡수성만을 고려하고 독립성을 고려하지 않기도 한다.<sup>1)</sup> (유일성, 이유태, 2004) 하지만, 본 연구에서는 20개의 주식으로 구성된 포트폴리오에 대해 VaR을 다변량모형에 대해서도 그 성과를 측정·비교하였다. 모형의 VaR 측정 성과 평가에서 무조건부적 위험흡수성 및 독립성을 각각 또한 동시에 검증한다. 기존 해외 연구와 비교하여, 다변량모형에 대한 연구에서는 분석대상 포트폴리오의 구성자산 수가 5개를 넘지 않는다. 반면, 본 연구에서는 20개의 자산을 사용하여 포트폴리오를 구성하여 이에 대한 VaR을 산출하였다. 아울러, 기존 연구는 단일변량모형과 다변량모형을 동시에 비교하는 경우는 많지 않는데, 본 연구에서는 동일한 포트폴리오에 대하여 단일변량모형과 다변량모형의 VaR 측정 성과를 동시에 비교하였다. 결론적으로 본 연구는 기존의 VaR 연구에 다변량모형의 유용성에 대한 지식과 경험을 추가할 수 있을 것으로 판단된다.

1) 독립성은 Christoffersen(1998)의 방법론이 아니어도 Geary(1970)의 런검정(runs test)로도 검증 가능하다.

이 논문의 내용은 다음과 같다. 제 2장에서는 VaR의 기본개념에 대해서 간략하게 살펴본다. 제 3장에서는 이 논문의 VaR 추정시 사용되는 단일변량모형 및 다변량모형에 대해서 살펴본다. 제 4장에서는 모형의 VaR 추정에 대한 적정성을 평가하기 위한 평가 방법론에 대해서 살펴본다. 제 5장에서는 분석 대상 자료에 대해서 간략하게 살펴볼 것이며, 제 6장에서는 이상을 바탕으로 각 모형을 이용하여 포트폴리오 VaR을 추정하고 그 성과를 평가한다. 마지막 절에서는 논문을 요약하고 결론을 맺는다.

## 2. VaR의 개념

Jorion(2000)은 VaR를 목표기간 동안의 자산 포지션에 따른 예상 손익 분포의 분위수(quantile)에 대한 묘사라고 하였다. 포트폴리오에 대한 포지션에 따른 목표기간 동안 신뢰수준  $100 \cdot c\%$  VaR은 식 (1)과 같이 정의된다.

$$c = \int_{-\text{VaR}}^{\infty} p(x) dx \quad (1)$$

식 (1)에서  $c$ 는 신뢰수준(confidence level),  $x$ 는 포트폴리오 포지션에 따른 목표기간 동안의 손익을 나타내는 확률변수,  $p(\cdot)$ 는 변수  $x$ 의 확률밀도함수(p.d.f.)이다.<sup>2)</sup> 만일 확률변수  $x$ 가 정규분포를 따른다면, 포트폴리오를 구성하는 자산의 수에 따라서 다음과 같이 쉽게 VaR을 구할 수 있다.

### 2.1 단일 자산인 경우 VaR

목표기간 동안 포트폴리오에 대한 포지션에 따른 손익율의 분포가 평균이 0이고, 표준편차가  $\sigma$ 인 정규분포를 따른다면, 목표기간 동안 신뢰수준  $100 \cdot c\%$  VaR는 식 (2)와 같이 계산된다.

$$\text{VaR}_c = -z_c \cdot V_0 \cdot \sigma \quad (2)$$

식 (2)에서  $z_c = \Phi^{-1}(1-c)$ , 여기서  $\Phi(\cdot)$ 는 표준정규분포의 누적분포함수(c.d.f.)이다.  $V_0$

2)  $x$ 가 양수이면 이익을, 음수이면 손실을 나타낸다. 포트폴리오에 대한 롱포지션에서는 포트폴리오 가치 상승시  $x$ 가 양의 값을, 가치 하락시  $x$ 가 음의 값을 갖게 된다. 반면, 포트폴리오에 대한 숏포지션에서는 포트폴리오 가치 상승시  $x$ 가 음의 값을, 가치 하락시  $x$ 가 양의 값을 갖게 된다.

는 포트폴리오의 목표기간의 초기 시점에서의 가치를 나타낸다. 예를 들어 현재 가치가 100원인 자산을 보유하고 있고, 그 가치의 일별증감율은 평균이 0이고, 표준편차가 1%인 정규분포를 따른다면, 1일 95% VaR은 1.64원( $= -(-1.64) \times 100 \times 0.01$ )이다. 이는 1일 후 시점에서 평가된 손실이 1.64원 이상이 될 확률이 5%라는 의미이다.

## 2.2 다수 자산으로 구성된 포트폴리오의 경우 VaR

$n$ 개 자산으로 구성된 포트폴리오  $p$ 를 목표기간 동안 보유시 그 손익률  $r_p$ 는 식 (3)과 같이 계산된다.

$$r_p = \sum_{i=1}^n \omega_i r_i \tag{3}$$

식 (3)에서  $r_i$ 는  $i$ 번째 자산 가치의 목표기간 동안 증감율이고,  $\omega_i$ 는 목표기간 초기 시점에서  $i$ 번째 자산의 가치가 전체 포트폴리오 가치에서 차지하는 비중이다. 이 때 포트폴리오 보유 포지션에 따른 손익률  $r_p$ 의 분산  $\sigma_p^2$ 는 식 (4)와 같이 계산된다.

$$\sigma_p^2 = \text{var}(r_p) = \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i \neq j} \omega_i \omega_j \sigma_{ij} \tag{4}$$

식 (4)에서  $\sigma_i$ 는  $i$ 번째 자산 가치 증감율  $r_i$ 의 표준편차를 의미하고,  $\sigma_{ij}$ 는  $i$ 번째 자산 가치 증감율  $r_i$ 와  $j$ 번째 자산 가치 증감율  $r_j$ 간 공분산을 의미한다. 식 (4)의 분산  $\sigma_p^2$ 은 아래의 식 (5)의 행렬 표현으로 나타낼 수도 있다.

$$\sigma_p^2 = [\omega_1, \dots, \omega_n] \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \dots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix} = \omega' \Sigma \omega \tag{5}$$

식 (5)에서  $\Sigma$ 는 포트폴리오  $p$ 를 구성하는 각 자산의 가치 증감율의 분산-공분산 행렬( $n \times n$ )이다.

이상으로부터 포트폴리오  $p$ 를 구성하는  $n$ 개 자산의 가치 증감율이 평균 0, 분산-공분산  $\Omega$ 인 다변량정규분포(multivariate normal distribution)를 따른다면, 목표기간 동안  $100 \cdot c\%$  VaR은 식 (6)과 같다.<sup>3)</sup>

3) 자산 보유 기간이 짧은 경우, 수익률 평균은 0으로 가정해도 무리가 없다.

$$\text{VaR}_c = -z_c \cdot V_0 \cdot \sigma_p = -z_c \cdot V_0 \cdot \sqrt{\eta' \Omega \eta} \quad (6)$$

식 (6)에서  $z_c = \Phi^{-1}(1-c)$ 이며,  $V_0$ 는 포트폴리오의 목표기간 초기 시점의 가치,  $\eta$ 는 포트폴리오 구성 종목의 비중을 나타내는 벡터이다.

### 3. VaR 측정 모형

포트폴리오 VaR를 측정하는 방식에는 식 (3)과 같이 다변량 시계열인 각 구성 종목 수익률을 단일변량인 포트폴리오 손익률로 전환 후, 이에 VaR 측정을 위한 각 모형을 적용하는 단일변량 접근 방법과, 식 (6)과 같이 각 구성 종목 가치 증감율의 분산-공분산 행렬을 먼저 구한 후, 이에 각 자산 가치가 전체 포트폴리오 가치에서 차지하는 비중으로 가중치를 적용하는 다변량 접근 방법이 있다.

본 연구에서는 포트폴리오 VaR을 측정하기 위한 단일변량모형으로 SMA 모형, EWMA 모형, 정규분포 오차항의 GARCH 모형(GARCH- $n$  모형),  $t$ -분포 오차항의 GARCH 모형(GARCH- $t$  모형), 그리고 비모수 방법론인 HS 등 5가지를 고려한다. 다변량모형으로는 O-GARCH 모형, CCC모형, DCC 모형을 고려한다. 이들 모형 외에도 VECM 모형, BEKK 모형 등의 초기 다변량 GARCH 모형도 있으나, 이들은 포트폴리오 구성 자산수가 늘어날수록 추정해야 할 모수 개수가 기하급수적으로 늘어나게 되어, 많은 자산으로 구성된 포트폴리오의 분산-공분산 행렬 계산에는 부적합하다고 판단되어 이 논문에서는 고려하지 않는다.<sup>4)</sup>

#### 3.1 단일변량모형

이하에서는 SMA 모형, EWMA 모형, GARCH- $n$  모형, GARCH- $t$  모형 및 HS의 5가지에 대해서 간략히 설명한다.

##### 3.1.1 SMA 모형

SMA 모형은 매우 단순한 모형으로,  $(t+1)$ 기에서 자산 가치 증감률의 분산을 현재 시점인  $t$ 기를 포함한 일정 길이를 갖는 과거 기간 동안 자산 가치 증감율의 분산으로

4) 구성 자산수가 20개 일 경우, VECM 모형에서 추정해야할 모수 개수는 88,410개이고, BEKK 모형의 경우 1,010개, DCC 모형의 경우 63개, O-GARCH 모형의 경우 60개이다.

예측하는 모형이다. 결국 SMA 모형에 따르면, 미래 시점인  $(t+1)$ 기까지 자산 증감율의 변동성  $\sigma_{t+1}^2$ 에 대한 예측치  $\tilde{\sigma}_{t+1}^2$ 은 식 (7)과 같다.

$$\tilde{\sigma}_{t+1}^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} r_{t-i}^2 \tag{7.5}$$

위에서  $\sigma_t$ 는  $t$ 기의 자산 가치 증감율의 표준편차를 의미하고,  $m$ 은 표준편차를 계산하기 위한 과거 기간의 길이를 의미하며,  $r_t$ 는  $t$ 기의 자산 가치 증감율을 의미한다.

### 3.1.2 EWMA 모형

특정 기의 변동성은 과거의 사건들 중 좀 더 최근의 사건 혹은 그 사건에 따른 변동성에 의해 더욱 큰 영향을 받는다는 직관을 적용한 모형이 EWMA 모형이다. 식 (7)에서 동일한 가중치  $1/m$ 이 아니라, 과거로 멀어질수록 그 가중치가 기하학적으로 감소된다고 하면, 아래 식 (8)과 같은 EWMA 모형을 얻을 수 있다.

$$\sigma_{t+1}^2 = (1-\lambda)r_t^2 + \lambda\sigma_t^2 \tag{8.6/7}$$

식 (9)에서  $\sigma_t$ 는  $t$ 기의 자산 가치 증감율의 표준편차,  $r_t$ 은  $t$ 기의 자산 가치 증감율을 의미한다.  $\lambda$ 는 가중치 상수이다. RiskMetrics(1996)에 따르면, 일별 주식 수익률의 경우  $\lambda = 0.94$ 로 설정하여 사용할 것을 권고하고 있다. 본 연구에서도 이를 따르도록 한다.

### 3.1.3 GARCH 모형

GARCH 모형은 Bollerslev(1986)에 의해서 제안되었으며, GARCH( $p, q$ ) 모형은 식 (9)와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} r_t | \Psi_{t-1} &\sim N(0, \sigma_t^2) \\ \sigma_t^2 = E(r_t^2 | \Psi_{t-1}) &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \gamma_j r_{t-j}^2 \end{aligned} \tag{9}$$

- 
- 5) 과거 각 기간 증감율의 평균은 0으로 가정한 셈이다.
  - 6) EWMA 모형은 GARCH 모형의 일종인 IGARCH(integrated GARCH) 모형이라 할 수 있다.
  - 7)  $\sigma_t$ 는  $t$ 시점에서 실제(true) 표준편차임에 유의하라. 미래 시점인  $(t+1)$ 시점에서의 표준편차  $\sigma_{t+1}$ 을 예측하기 위해서는 EWMA 모형을 추정하여  $\{\hat{\sigma}_s^2\}_{s=1}^{t+1}$ 을 구하여  $\hat{\sigma}_{t+1}$ 을 예측치로 사용하면 된다.

식 (9)에서  $r_t$ 는  $t$ 기의 자산 가치 증감율을 나타내며,  $\sigma_t$ 는  $t$ 기의 자산 가치 증감율의 조건부 표준편차를 나타내며,  $\psi_t$ 는  $t$ 기까지의 정보집합을 나타낸다. GARCH 모형은  $t$ 기의 변동성이 과거 변동성 및 과거 충격의 제곱에 의해 결정된다는 것을 모형화한 것이다. 통상 GARCH 모형을 이용하여 금융시계열의 변동성을 모형화할 경우 GARCH(1, 1) 모형만으로도 충분한 경우가 많이 있다.<sup>8)</sup> 본 연구에서는 GARCH(1, 1) 모형을 바탕으로 모든 논의를 진행한다. GARCH(1, 1) 모형에서  $\alpha_0=0$ ,  $\alpha_1+\beta_1=1$ 의 제약을 주면 소위 IGARCH 모형이 되며, 이는 앞서 논의한 EWMA 모형과 동일하게 된다.

식 (9)에서는  $t$ 기 자산 가치 증감율  $r_t$ 의 조건부 분포가 정규분포인 것으로 표현되어 있지만, 정규분포 대신  $t$ -분포를 사용할 수도 있다. 통상 일별 주식 수익률의 조건부 분포는 정규분포보다는 꼬리 부분이 두터운 것으로 알려져 있다. 자유도가 30이하인  $t$ -분포는 정규분포보다 두터운 꼬리를 가지므로, 주식수익률을 모형화하여 분석하는데 보다 나을 수도 있다.  $t$ -분포로 설정할 경우 그 자유도도 추정 대상 모수가 된다.

### 3.1.4 HS

비모수적 방법론인 HS는 과거 가격 변동의 ‘경험적 분포(empirical distribution)’를 구한 후, 그 분포의 분위수를 이용해 VaR을 계산한다. 즉,  $t$ 기에서의 자산 가치를  $v_t$ 라 할 때, 과거 일정 길이  $m$ 의 기간 동안 각 기간의 가치변동치  $\{\Delta v_s = v_s - v_{s-1}\}_{s=t-(m-1)}^t$ 을 구하여 크기순으로 나열한 후, 주어진 신뢰수준을 고려하여 VaR을 구하면 된다.<sup>9)</sup> 예를 들어, 어떤 자산을 보유했을 때, 그 자산 가치의 과거 가치변동치들 총 1,000개가 있을 경우, 이 중 제일 작은 값으로부터 50번째 위치한 값이 신뢰수준 95% VaR이 된다.

## 3.2 다변량모형

금융시계열의 통상적인 실증적 특성인 변동성 군집현상(volatility clustering)을 모형화하는데 유용한 GARCH 모형을 다변량모형에 적용할 수 있다면, 다변량 시계열의 변동성 분석에 아주 유용할 것이다. 이러한 유용성은 오래 전부터 인식되어져 왔으나 변수가 하나씩 증가할 때마다 추정해야 하는 공분산을 구성하는 원소들의 수가 기하급수적으로 증가하는 단점으로 인해 실제 연구 및 활용은 매우 제한적이었다.<sup>10)</sup>

8) GARCH(1, 1) 모형을 변형하면 제약이 부과된 ARCH( $\infty$ ) 모형이 된다.

9) HS에 대한 설명의 편의상, 자산 가치 증감율이 아닌 자산 가치 변동으로 HS 방법을 설명한다.

10) curse of dimensionality.

이러한 추정상의 어려움을 극복하고자 많은 다변량 GARCH 모형(multivariate GARCH model)이 제안되었으며, 이 중 본 연구에서는 CCC 모형, DCC 모형, O-GARCH 모형을 VaR 측정에 사용하였다.

### 3.2.1 CCC 모형

다변량 GARCH 모형 추정의 어려움을 극복하고자 Bollerslev(1990)은 CCC 모형을 제안하였다. CCC 모형은 각 시계열간 상관관계 행렬이 시간에 따라 변하지 않는다고 가정함으로써 다변량 시계열의 조건부 분산-공분산 행렬 추정상의 난점을 극복하고자 했다. CCC 모형은 다음의 식 (10)와 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} r_t | \Psi_{t-1} &\sim N(O, H_t) \\ H_t &= D_t R D_t \end{aligned} \quad (10)$$

식 (10)에서  $r_t$ 는  $t$ 기에서 다변량 자산 가치 증감율,  $H_t$ 는  $t$ 기에서  $r_t$ 의 조건부 분산-공분산 행렬을 의미하며,  $\Psi_t$ 는  $t$ 기까지의 정보집합이다.  $R$ 은 시간에 따라 변하지 않는  $r_t$ 의 조건부 상관관계수 행렬(constant conditional correlation matrix)이며,  $R$ 의  $(i, j)$ 번째 원소는 포트폴리오내 개별 자산  $i$ 와 개별 자산  $j$ 간 상관관계수  $\rho_{ij}$ 이다.  $D_t = \text{diag}(\sqrt{h_{it}})$ 이며,  $h_{it}$ 는  $t$ 기 포트폴리오내 개별 자산  $i$ 의 시간가변 조건부 분산이며 이는 단일변량 GARCH 모형을 이용하여 계산된다.<sup>11)</sup> 조건부 분산-공분산 행렬  $H_t$ 의  $(i, j)$ 번째 원소는  $\rho_{ij}\sqrt{h_{it}}\sqrt{h_{jt}}$ 이다.

### 3.2.2 DCC 모형

CCC 모형은 조건부 상관관계수 행렬이 변하지 않는다고 가정한 후, 각 개별 시계열에 대한 단일변량 GARCH 모형의 결과를 이용하여 조건부 분산-공분산 행렬을 추정함으로써 추정의 어려움을 극복한 장점을 가지나, 상관관계의 동태성(dynamics)를 고려하지 않는 단점을 지닌다.

Engle(2001)은 CCC 모형의 단점을 극복하는 새로운 다변량 GARCH 모형인 DCC 모형을 제안하였다. DCC 모형에서는 상관관계수 행렬인  $R$ 이 시간에 따라서 변하는 것으로 설정하기 때문에 이를  $R_t$ 로 표시한다. 이리하여 DCC 모형은 다음의 식 (11)와 같이 표현된다.

11)  $\text{diag}(\sqrt{h_{it}})$ 는 대각원소인  $(i, i)$ 번째 원소가  $\sqrt{h_{it}}$ 이고, 다른 모든 비대각 원소는 0인 정방대각 행렬을 의미한다.

$$\begin{aligned}
 r_t | \Psi_{t-1} &\sim N(O, H_t), \\
 H_t &= D_t R_t D_t, \quad D_t = \text{diag}(\sqrt{h_{it}}), \\
 h_{it} &= \omega^{(i)} + \sum_{m=1}^M \delta_m^{(i)} r_{t-m}^2 + \sum_{n=1}^N \xi_n^{(i)} h_{i,t-n}, \\
 \epsilon_t &= D_t^{-1} r_t, \\
 Q_t &= (1 - \sum_{m=1}^M \alpha_m - \sum_{n=1}^N \beta_n) \bar{Q} + \sum_{m=1}^M \alpha_m (\epsilon_{t-m} \epsilon_{t-m}^T) + \sum_{n=1}^N \beta_n Q_{t-n}, \\
 R_t &= \text{diag}[Q_t]^{-1/2} Q_t \text{diag}[Q_t]^{-1/2}
 \end{aligned} \tag{11}^{12}$$

식 (11)에서  $r_t$ 는  $t$ 기에서 다변량 자산 가치 증감율,  $\Psi_t$ 는  $t$ 기까지의 정보집합,  $H_t$ 는 시간가변 분산-공분산 행렬을 의미하고,  $D_t$ 는  $\sqrt{h_{it}}$ 를  $(i, i)$ 번째 대각원소로 갖는 대각 행렬이며, 그 원소인  $h_{it}$ 는 포트폴리오 구성 종목  $i$ 의  $t$ 기에서의 조건부 분산으로 단일 변량 GARCH( $M, N$ )을 따르는 것으로 설정된다.  $\epsilon_t$ 는 표준화된 잔차(standardized residual)로 그 조건부 분산-공분산 행렬은  $Q_t$ 로 이는 GARCH( $M, N$ )과 유사하게 모형화 된다.  $\bar{Q}$ 는 표준화된 잔차  $\epsilon_t$ 의 비조건부 분산-공분산 행렬이다. 직관적으로 DCC 모형은 동태적 상관관계를 GARCH 유형의 모형 설정을 통해 고려하고 있다.

DCC 모형의 장점은 CCC 모형에 비해서 포트폴리오 각 구성 종목 시계열간 상관관계의 동태적 변화를 고려했다는 것이지만, 단점은 이러한 동태성이 단지 공통의 계수  $\{\alpha_m\}_{m=1}^M$  및  $\{\beta_n\}_{n=1}^N$ 으로만 요약되는 방식으로 모형화 된다는 점이다. 즉, 모든 변수 간 조건부 상관관계가 동일한 동태성을 가진다고 가정하는 것이다.

Engle and Sheppard(2001)는 DCC 모형에 대해 2단계 추정 방법을 제시하였다. 1단계에서는 포트폴리오의 개별 자산에 대해서 단일변량 GARCH 모형을 이용하여 잔차를 추정하고, 2단계에서는 이 잔차를 이용하여 동태적 상관관계를 추정한다. DCC 모형의 추정에 관한 자세한 사항은 Engle and Sheppard(2001)을 참조하라.

### 3.2.3 O-GARCH 모형

Alexander(2001)는 O-GARCH 모형의 분산-공분산 행렬을 구하기 위해서 주성분분석(principal component analysis: PCA) 방법을 사용하였다. 이 모형에서는 시간에 따라 변화하는 분산-공분산 행렬  $H_t$ 는 식 (12)와 같이 구해진다.

12)  $\text{diag}[Q_t]$ 는  $Q_t$ 의 대각원소는 그대로 두고, 나머지 원소를 0으로 바꾼 행렬을 의미한다.

$$H_t = AD_tA^T \quad (12)$$

여기서  $D_t$ 는 원래의 다변량 시계열  $r_t$ 의 주성분의 시간 가변 조건부 표준편차를 대각원소로 갖는 시간 가변 대각행렬이고,  $A$ 는 조정된 가중치이다. 대각행렬  $D_t$ 는 단일변량 GARCH 모형을 이용하여 추정된다.

주성분분석 기법은 벡터시계열 관측치(벡터공간의 원소)들을 이들의 주성분인 분산-공분산 행렬의 고유벡터(eigenvectors)가 생성(span)하는 공간으로 선형이동 후 분석을 실시하는 방법이다. 분산-공분산 행렬의 고유벡터는 서로 직교하므로 이들 고유벡터가 기저가 되는 공간에서의 분산-공분산 행렬은 비대각원소가 모두 0이다. 따라서 원변수들의 선형변환이 이러한 공간으로 선형이동하게 되면, 이들은 서로 직교(상관관계가 0)하기 때문에 그 분산-공분산 행렬을 구하기 위해서 변환된 변수의 분산만 고려하면 된다. 각각의 분산은 벡터시계열을 선형 변환하여 얻어지는 단일변량 시계열을 이용하여 계산된다.

직관적으로 O-GARCH 모형은 현재의 자료가 관측되는 공간에서 분산-공분산 행렬  $H_t$ 를 직접 구하는 것이 어려우므로, 이를 구하기 용이한 주성분 공간에서 대각행렬로서의 분산-공분산 행렬  $D_t$ 를 구한 후, 이 두 공간을 연결짓는 선형변환(즉, 행렬)  $A$ 를 이용하여 원래 공간에서의 분산-공분산 행렬을 구하는 방법( $H_t = AD_tA^T$ )을 취하는 것이다.

## 4. 모형의 VaR 측정 성과 평가

각 모형의 VaR 측정 성과에 대한 평가를 위해 표본외 기간(out-of-sample period)에 대한 사후검증 방식을 이용하였다. 사후검증이란 현재 시점에서 과거 일정기간 동안 모형의 VaR 측정 결과를 재현하여, 그 VaR 예측치와 실제 손실 실현치를 비교하여 모형의 VaR 측정 성과를 판단하는 방법이다. 사후검증 결과는 모형의 무조건부적 위험흡수성 및 예측결과의 독립성 관점에서 해석되어야 한다.

### 4.1 사후검증 방법론

$t$ 기에서 계산된  $(t+1)$ 기의 신뢰수준  $100 \cdot \alpha\%$  VaR 예측치를  $\widetilde{\text{VaR}}_{t+1}(\alpha)$ 라 하고,  $t$ 시점의 포트폴리오 손익을  $\Delta_t$ 라고 할 때, 실현함수  $I_{\{\Delta_{t+1} \leq -\widetilde{\text{VaR}}_{t+1}(\alpha)\}}$ 를 고려하자.<sup>13)</sup> 이는

실제 손실이 VaR 예측치를 초과하는 경우 1, 그렇지 않은 경우 0의 값을 갖는다. 실현 함수를 이용하여 과거의 일정 기간( $t=\tau_1$ 로부터  $t=\tau_2$ 까지)에 대한 표본의 예측 결과를 나타내는 수열  $\{I_{\{\Delta_s \leq -\widehat{\text{VaR}}_s(\alpha)\}}\}_{s=\tau_1}^{\tau_2}$  이 실현되며, 이 수열의 특성을 분석하여 해당 모형의 VaR 측정 성과를 평가할 수 있다.

Christoffersen(1998), Lopez(2002), Campbell(2005)에 의하면 정확한 예측력을 가진 모형은 조건부적 위험흡수성을 만족한다. 조건부적 위험흡수성이란 해당 모형을 통해  $t$  기에서의 정보 집합  $\mathcal{F}_t$ 를 이용하여  $(t+1)$ 기에 대한 신뢰수준  $100 \cdot (1-p)\%$  VaR를 예측했을 때,  $(t+1)$ 기에서의 실현함수 기대치(expected value)가  $p$ 가 되는 성질이다.<sup>14)</sup> 예를 들어, 조건부적 위험흡수성을 지닌 모형으로  $t$ 기에서 정보집합  $\mathcal{F}_t$ 의 일부인 과거 500일의 정보를 이용하여 신뢰수준 99% VaR를 예측하였다면,  $(t+1)$ 기에서 실제 손실이 이를 초과할 확률은 1%가 되어야 한다.

Christoffersen(1998)은 이러한 조건부적 위험흡수성의 만족 여부는 무조건부적 위험흡수성과 독립성 성질의 만족 여부 문제로 귀결된다고 하였다. 이하에서는 무조건부적 위험흡수성 및 독립성을 이용한 조건부적 위험흡수성의 검정을 위해서 Christoffersen (1998)이 제안한 우도비 검정을 논의한다.

#### 4.2 무조건부적 위험흡수성 검정

무조건부적 위험흡수성이란 모형에 의해서 발생한 실제 예외적 사항의 빈도가 주어진 신뢰수준에 따라 기대되는 예외 사항의 빈도와 일치해야 한다는 것이다. 가령 일별로 어떤 모형에 따라 신뢰수준 99% VaR을 측정하는 사후검증을 500번 실시했을 때, 사전적으로 예상되는 예외 사항의 빈도는 5(= 500×1%)번이다. 그런데, 실제 발생한 예외 사항의 빈도가 통계적으로 유의하게 5와 다르다면 이 모형은 VaR 측정에 부적합하다고 판단할 수 있다. 무조건부적이라는 것은 사후검정 전체 기간을 고려해서 결과를 평가한다는 의미이다.

Christoffersen(1998)은 식 (13)의 우도비 검정 통계량  $LR_{uc}$ 를 이용해 무조건부적 위험흡수성을 검증하였다.

13)  $I_{\{ \cdot \}}$ 는 괄호 안이 만족되면 1, 그렇지 않으면 0의 값을 갖는 지시함수(indicator function)이다.  
 14)  $E[I_{\{\Delta_{t+1} \leq -\widehat{\text{VaR}}_{t+1}(1-p)\}} | \Psi_t] = p$ . Christoffersen(1998)은 이러한 조건부적 예측성을 지닌 실현함수  $\{I_{\{\Delta_t \leq -\widehat{\text{VaR}}_t(\alpha)\}}\}_{t=\tau_1}^{\tau_2}$  가 i.i.d.임을 증명하였다.

$$LR_{uc} = -2 \left[ \ln(1-p)^{n_0} p^{n_1} - \ln \left( 1 - \frac{n_1}{n_0+n_1} \right)^{n_0} \left( \frac{n_1}{n_0+n_1} \right)^{n_1} \right] \sim^a \chi^2(1) \quad (13)$$

여기서  $p$ 는 VaR의 신뢰수준에 따라 미리 정해지며  $n_0$ 는 실제 손실이 예측 VaR을 초과하지 않은 횟수,  $n_1$ 은 실제 손실이 예측 VaR을 초과한 횟수를 나타낸다. 기호  $\sim^a$ 는 점근분포(asymptotic distribution)임을 나타낸다. 식 (13)의 우도비 검정 통계량  $LR_{uc}$ 는 해당 모형이 신뢰수준  $100 \cdot (1-p)\%$  VaR 측정에 적합하다는 귀무가설 하에서 자유도 1의 카이제곱 분포를 따른다. 직관적으로 이 검정은 실현함수 0/1 수열에서 1의 개수가 기대치와 유사하게 나오는지를 검증하는 것이라 할 수 있다.

### 4.3 독립성 검정

독립성이란 실현함수에 의한 수열이 무작위적이어야 한다는 것이다. 수열이 무작위성을 띠지 않으면, 일정한 패턴이 인식되어 질 수 있고, 모형은 이러한 패턴마저도 반영하고 있었어야 했으나 그렇지 못한 것이었으므로, 그러한 수열을 생성해낸 모형은 VaR 측정에 좋은 모형이 아니라고 할 수 있다.

Christoffersen(1998)은  $t$ 기에서 실현함수 결과가  $(t-1)$ 기의 결과(outcome)에 의존적이지 아닌지를 검정하기 위해 서로 독립적이라는 귀무가설과 1계 마르코프 특성이 있다는 대체가설에 대한(independent vs. 1st order Markov) 우도비 검정을 제안하였다. 이 우도비 검정 통계량  $LR_{ind}$ 는 식 (14)와 같다.

$$LR_{ind} = -2 \left[ \ln \left( 1 - \frac{n_{01} + n_{11}}{n_{00} + n_{10} + n_{01} + n_{11}} \right)^{n_{00} + n_{10}} \left( \frac{n_{01} + n_{11}}{n_{00} + n_{10} + n_{01} + n_{11}} \right)^{n_{01} + n_{11}} \right. \\ \left. - \ln \left( 1 - \frac{n_{00}}{n_{00} + n_{01}} \right)^{n_{00}} \left( \frac{n_{00}}{n_{00} + n_{01}} \right)^{n_{01}} \left( 1 - \frac{n_{11}}{n_{10} + n_{11}} \right)^{n_{10}} \left( \frac{n_{11}}{n_{10} + n_{11}} \right)^{n_{11}} \right] \sim^a \chi^2(1) \quad (14)$$

식 (14)를 보면,  $n_{ij}$ 만 구하면  $LR_{ind}$ 를 계산할 수 있음을 알 수 있다.  $n_{ij}$ 는  $n_{00}$ ,  $n_{01}$ ,  $n_{10}$ ,  $n_{11}$ 의 총 4가지가 있는데, 이는 연이은 두 실현치가  $i, j$ 인 사건의 개수를 의미한다. (즉,  $n_{01}$ 은 실현함수의 실현치가 0이었던다가 1이었던 총 횟수) 식 (14)의 대괄호안의 전자의 항은 실현함수가 독립일 때의 최대우도이고, 후자의 항은 실현함수가 1차 마르코프 과정일 때 최대우도임에 유의하라. 직관적으로 이 검정은 실현함수 0/1 수열에서 0과 1이 실현되는 패턴이 독립적인지 종속적인지 검증하는 것이라 할 수 있다.

#### 4.4 조건부적 위험흡수성 검정

Christoffersen(1998)은 상기의 무조건부적 위험흡수성 검정과 독립성 검정을 결합한 검정을 통하여 실현함수 실현치 수열의 조건부적 위험흡수성을 검증하는 식 (15)와 같이 우도비 검정 통계량  $LR_{cc}$ 를 제안하였다.

$$LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind} \sim \chi^2(2) \quad (15)$$

본 연구에서는 VaR 측정 모형으로서의 적합성을 검증하기 위해 상기의 조건부적 위험흡수성 검정을 이용한다. 결국 이 검정은 0/1 수열에서 1의 개수의 적정성 및 0과 1이 실현되는 패턴을 함께 고려하여 검증하는 것이라 할 수 있다.

### 5. 자료

본 연구에서는 20개 주식으로 구성된 가상적 포트폴리오를 상정하고, VaR 계산시 여러 단일변량모형 또는 다변량모형 중 어떤 모형이 가장 우수한지 분석한다. 가상 포트폴리오는 국내 유가증권시장 상장 종목 중 1990년 1월 3일부터 2007년 12월 28일까지의 일별 기준가 및 종가 자료가 존재하는 종목 중에서, 2007년 말 현재 시가총액 상위 20개 종목으로 구성하였다.<sup>15)16)</sup> 이들 종목들은 주식시장에서 거래가 활발히 이루어지기 때문에 실제 주식형 펀드 포트폴리오에 포함될 가능성이 크다. 이들 종목들의 일별 수익률을 계산하기 위한 기준가 및 종가 자료는 FnGuide에서 발행하는 Data Guide Pro에서 추출하였다.<sup>17)</sup>

자료는 1990년부터 확보했지만, VaR 측정을 위해 ‘추정윈도우(estimation window)’가

15) 가상 포트폴리오를 구성하는 20개 종목은 다음과 같다: 삼성전자, POSCO, 한국전력, SK텔레콤, 현대자동차, 신세계, LG상사, 삼성화재, 삼성물산, 현대건설, SK, S-Oil, GS건설, 현대모비스, LG, 현대제철, 대림산업, 삼성증권, 대우증권, 현대미포조선

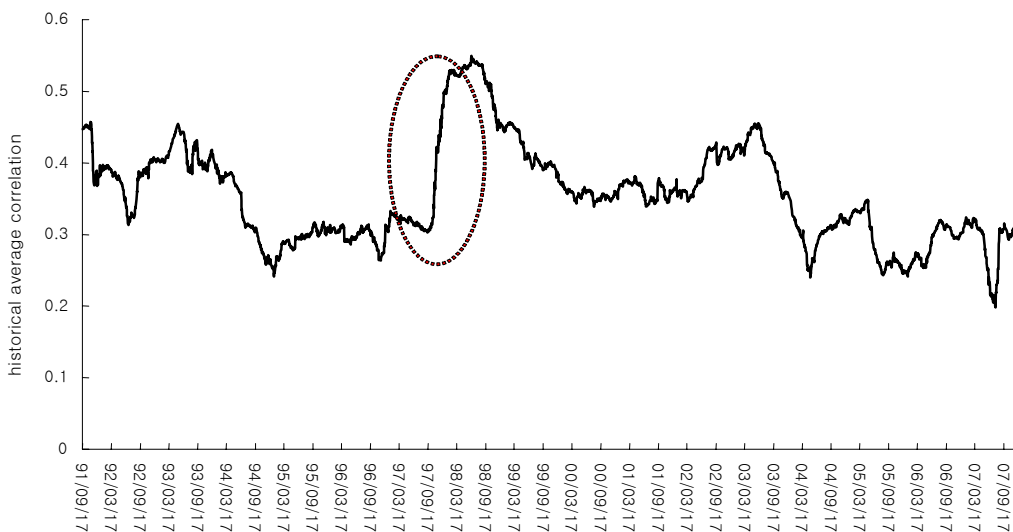
16) 시가총액 상위 포트폴리오와 비교하여 시가총액 분위수별 포트폴리오의 VaR 측정에 대한 연구도 가치 있다고 판단된다. 사전적으로 예상컨대, 시가총액이 작을수록 유동성의 차이로 인한 가격 변화가 발생할 가능성이 커져, VaR에 의한 손실 예측이 적합하지 않을 것으로 보인다. 이에 대해선 과연 그러한가에 대한 실증적 연구가 필요하다, 이는 본 연구의 주제와 다소 괴리가 있다고 판단된다.

17)  $t$ 일 기준가 및 종가로부터 일일 수익률(일일 증감율)은  $100 \times [\ln(t\text{일 종가}) - \ln(t\text{일 기준가})](\%)$ 로 계산된다.

필요하므로, 실제적인 사후검증 기간은 1991년 9월 17일부터 2007년 12월 28일(총 4,357 거래일)까지로 설정하였다. 이 기간에는 주식시장의 변동성 및 개별 종목간 상관관계의 큰 변화를 보였던 1997~1998년 경제위기 기간이 포함된다. <Figure 1>은 포트폴리오 구성종목 20개 주식 일일 수익률의 평균 상관관계의 추이를 보여주고 있다. 이는 역사적 변동성(historical variance) 계산 방식과 마찬가지로 매시점에서 그 시점을 포함하여 과거 500일간 자료를 이용하여 상관관계가 계산되고, 모든 종목간 상관관계를 계산한 후 이를 평균하여 얻은 그림이다. 역사적 변동성을 시간가변 변동성의 증거로 볼 수 없듯이, <Figure 1>을 시간가변 상관관계의 증거로 볼 수는 없다. 하지만, 이와 같은 그림을 통해 DCC 모형과 같은 동태적 상관관계 모형의 필요성을 인지할 수 있다.

Figure 1. Average correlation of 20 stocks in hypothetical portfolios

This figure shows the daily historical average correlation among the daily growth rates of 20 individual stocks in hypothetical portfolios from 1991. 9. 17. to 2007. 12. 28. which is estimated with the past sample whose size is 500. The area denoted by dotted line represents the Korean currency crisis.



분석에 사용하는 가상 포트폴리오는 이상의 20개 종목의 동일 가중 포트폴리오 및 시가 가중 포트폴리오이다. 따라서 일별로 각 종목 일일 수익률에 1/20 가중치 또는 20개 종목의 전체 시가총액에서 각 종목의 시가가 차지하는 비중을 가중치로 포트폴리오 수익률이 계산된다. <Figure 2> 및 <Figure 3>는 이러한 포트폴리오 일일 수익률의 추이를 보여주고 있다. 육안으로도 쉽게 변동성 군집 현상을 확인할 수 있다.

Figure 2. Daily growth rate of the hypothetical equally-weighted portfolio

This figure shows the daily growth rates of the hypothetical equally-weighted portfolio from 1991. 9. 17. to 2007. 12. 28.

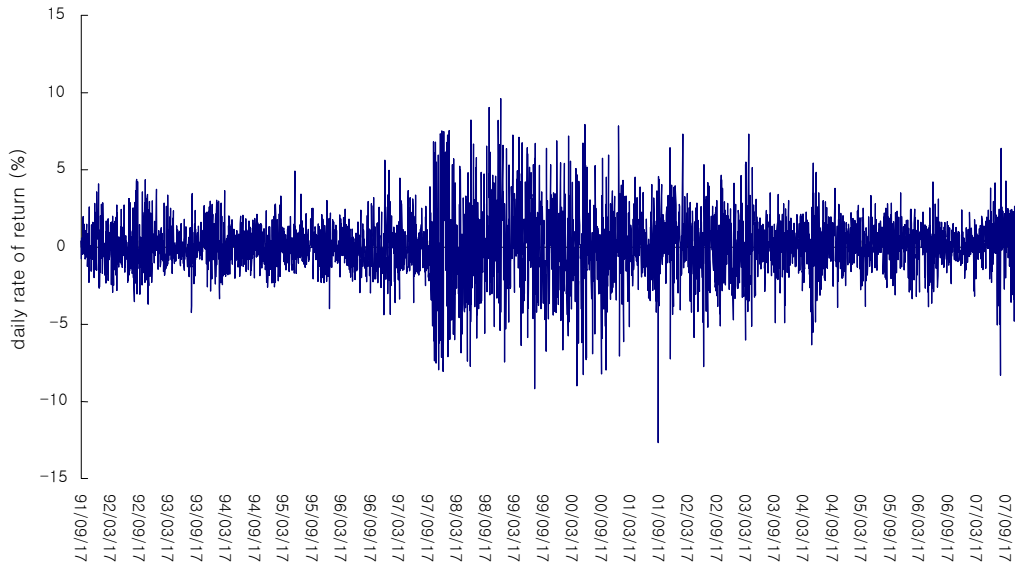
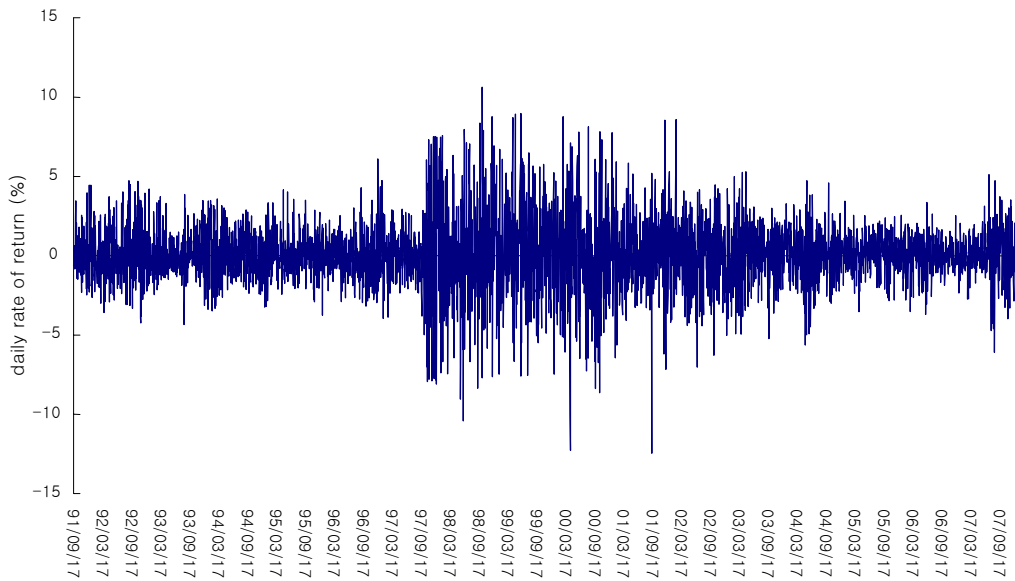


Figure 3. Daily growth rate of the hypothetical value-weighted portfolio

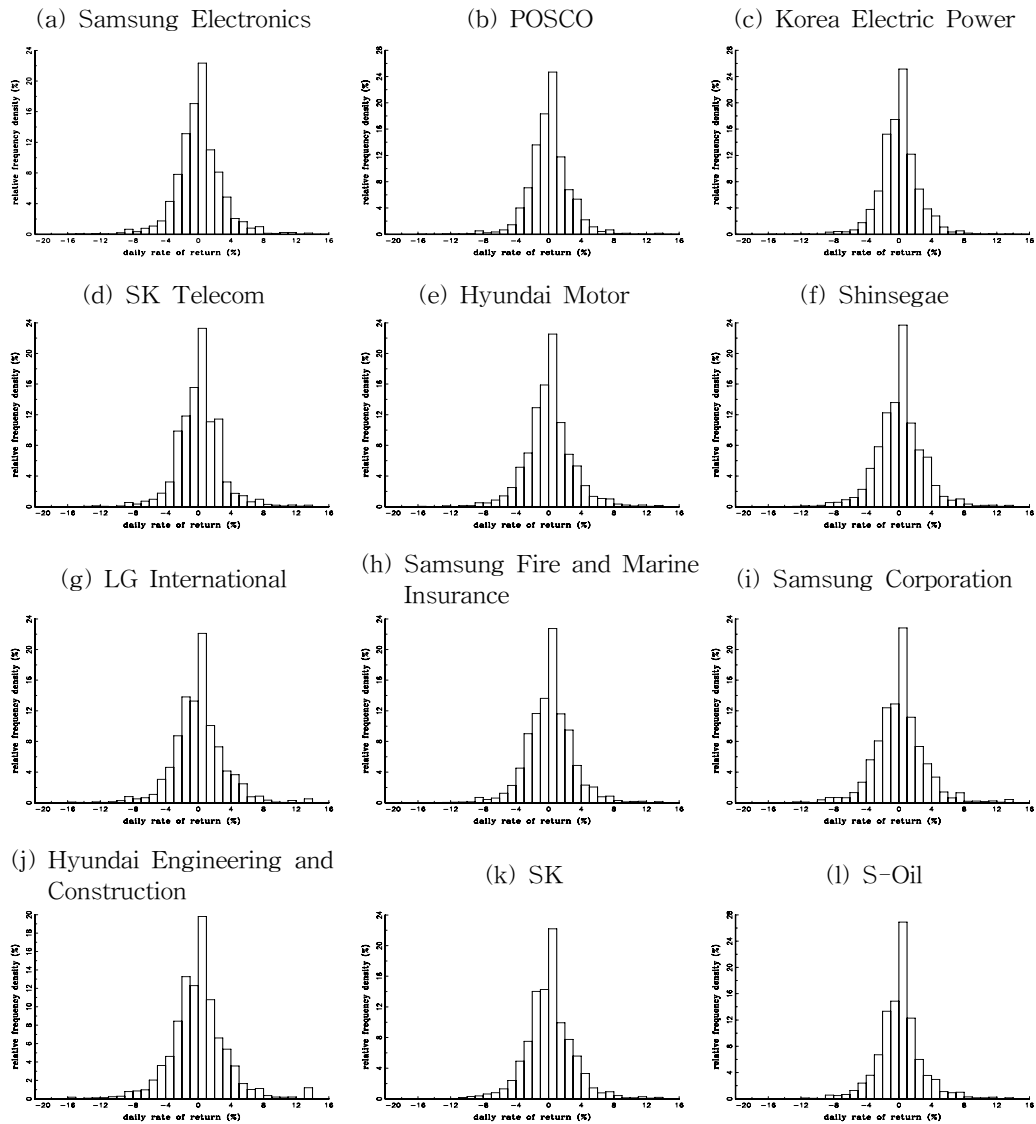
This figure shows the daily growth rates of the hypothetical value-weighted portfolio from 1991. 9. 17. to 2007. 12. 28.



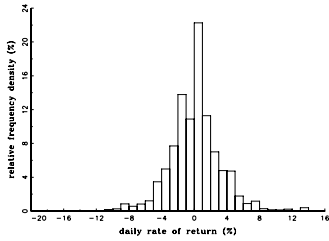
다음의 <Figure 4>는 포트폴리오를 구성하는 20개 개별 종목의 일일수익률 및 이 포트폴리오의 일일수익률의 히스토그램을 나타내고 있다. 모든 히스토그램에서 정규분포보다는 봉우리 부분이 뾰족해 보이는 것을 알 수 있다. 즉, 과침(leptokurtic)의 양상이 쉽게 나타난다. 이에 따라 극단적 실현치들의 빈도가 적지 않음을 알 수 있다.

Figure 4. Histogram of the daily growth rate of stocks and portfolios

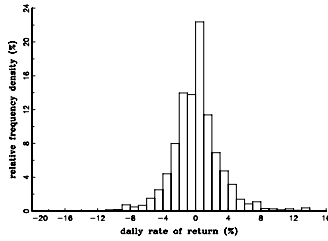
These figures show the empirical histogram of the daily growth rate of 20 stocks in hypothetical portfolios as well as those portfolios from 1991. 9. 17. to 2007. 12. 28.



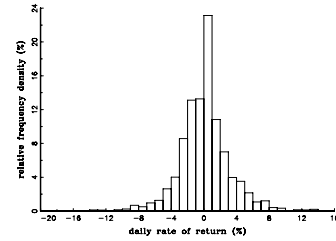
(m) GS Engineering and Construction



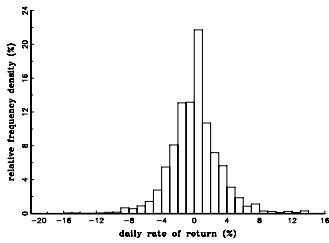
(n) Hyundai Mobis



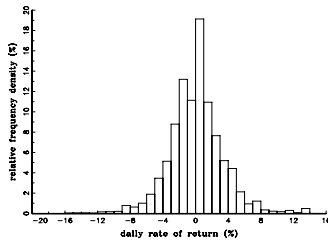
(o) LG



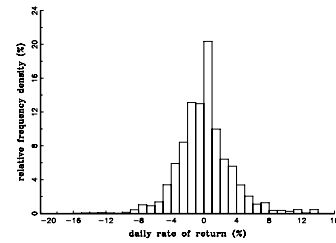
(p) Hyundai Steel



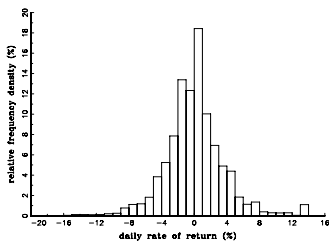
(q) Daelim Industrial



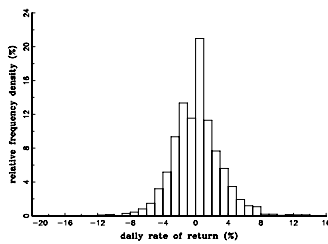
(r) Samsung Securities



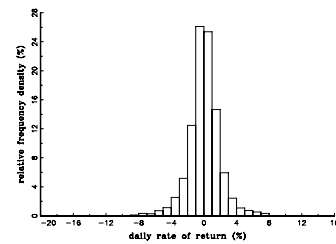
(s) Daewoo Securities



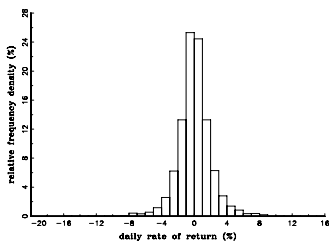
(t) Hyundai Mipo Dockyard



(u) Equally-weighted portfolio



(v) Value-weighted portfolio



다음 <Table 1>은 포트폴리오 20개 구성 종목의 일일수익률 및 이들이 구성 종목이 되는 동일 가중 및 시가 가중 포트폴리오의 일일수익률에 대한 요약통계량을 보여주고 있다. 모든 종목 및 포트폴리오의 평균은 거의 0에 가깝고, 표준편차에 비해 매우 작다. 따라서 일일 수익률의 평균은 0이라는 가정하에 분석해도 무방한 것으로 판단된다. 모든

종목에서 첨도가 5 이상의 초과첨도(excessive kurtosis)를 나타내며, Jarque-Bera 통계량은 수익률의 비조건부 분포가 정규분포를 따르지 않음을 보여주고 있다.

Table 1. Summary of the daily growth rate of stocks and portfolios

This table shows the summary statistics of the daily growth rate of 20 stocks in hypothetical portfolios as well as those portfolio from 1990. 1. 3. to 2007. 12. 28.

	Samsung Electronics	POSCO	Korea Electric Power Co.	SK Telecom	Hyundai Motor	Shinsegae
mean(%)	0.0778	0.0727	0.0203	0.0993	0.0380	0.0825
median(%)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
max(%)	13.9762	13.9420	13.9655	13.9762	13.9762	13.9762
min(%)	-14.6604	-12.8063	-12.9291	-16.2519	-16.2119	-16.2519
std. dev.(%)	2.7794	2.4713	2.3583	2.7773	2.8995	2.9123
skewness	0.1843	0.2026	0.1350	0.1086	0.1461	0.1397
kurtosis	6.3531	6.7821	6.1017	7.6384	6.1203	5.9439
Jarque-Bera stat.	2164.86	2752.57	1844.22	4102.12	1868.53	1663.61
[p-value]	[0.0000]	[0.0000]	[0.0000]	[0.0000]	[0.0000]	[0.0000]
sample size	4,857	4,857	4,857	4,857	4,857	4,857

	LG International	Samsung Fire and Marine Insurance	Samsung Co.	Hyundai Engineering and Construction	SK	S-Oil
mean(%)	0.0110	0.1059	0.0369	-0.0498	0.0461	0.0581
median(%)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
max(%)	13.9762	13.9762	13.9762	13.9762	13.9762	13.9762
min(%)	-16.2519	-16.0972	-16.2175	-16.2519	-16.2307	-16.1143
std. dev.(%)	3.1378	2.8409	3.1173	3.6677	2.9916	2.7816
skewness	0.2221	0.1362	0.2087	0.1029	0.1154	0.2518
kurtosis	6.5456	5.6131	6.4249	6.9088	6.2331	6.7850
Jarque-Bera stat.	2429.28	1313.16	2264.79	2914.79	1998.81	2773.86
[p-value]	[0.0000]	[0.0000]	[0.0000]	[0.0000]	[0.0000]	[0.0000]
sample size	4,857	4,857	4,857	4,857	4,857	4,857

	GS Engineering and Construction	Hyundai Mobis	LG	Hyundai Steel	Daelim Industrial	Samsung Securities
mean(%)	0.0613	0.0437	0.0299	0.0440	0.0556	0.0540
median(%)	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
max(%)	13.9762	13.9595	13.9541	13.9762	13.9762	13.9762
min(%)	-16.2223	-16.1793	-16.2519	-16.2519	-16.1904	-17.6130
std. dev.(%)	3.1510	3.0738	3.1611	3.0850	3.3577	3.3252
skewness	0.2229	0.2736	-0.0903	0.2307	0.1914	0.3240
kurtosis	5.6862	6.5854	6.5462	6.0159	5.6502	5.9877
Jarque-Bera stat. [p-value]	1410.61 [0.0000]	2502.67 [0.0000]	2398.73 [0.0000]	1770.99 [0.0000]	1364.12 [0.0000]	1778.16 [0.0000]
sample size	4,857	4,857	4,857	4,857	4,857	4,857

	Daewoo Securities	Hyundai Mipo Dockyard	Equally -weighted portfolio	Value -weighted portfolio
mean(%)	0.0190	0.0605	0.0483	0.0357
median(%)	0.0000	0.0000	0.0321	-0.0001
max(%)	13.9762	13.9762	9.6039	10.6153
min(%)	-16.2446	-16.2349	-12.6637	-12.4408
std. dev.(%)	3.7038	2.9514	1.9358	2.0214
skewness	0.2498	0.2048	-0.0632	-0.0085
kurtosis	6.0297	5.1405	6.1862	6.3355
Jarque-Bera stat. [p-value]	1793.80 [0.0000]	903.62 [0.0000]	1934.42 [0.0000]	2116.67 [0.0000]
sample size	4,857	4,857	4,857	4,857

## 6. 분석 결과

본 연구는 한국 유가증권시장 시가총액 상위 20종목으로 이루어진 가상 포트폴리오에 대해 VaR 측정에 있어 단일변량모형과 다변량모형의 성과를 비교 분석하는 것이

다. 앞서 언급했듯이 가상 포트폴리오는 동일 가중 또는 시가 가중으로 20개 개별 주식으로 구성되어 있음을 전제한다. 이 절에서는 단일변량모형 및 다변량모형 각각에 대해서 VaR 측정 결과를 도출하고, 제 4장에서 논의한 조건부적 위험흡수성 측면에서 어떤 모형이 포트폴리오 VaR 측정에 가장 적합한가를 판단한다. VaR을 계산하는데 있어 매수포지션을 취했을 때 관심이 되는 포트폴리오 증감율의 좌측 꼬리 부분과 매도포지션을 취했을 때 관심이 되는 포트폴리오 증감율의 우측 꼬리 부분에 대해서 모두 고려한다.

## 6.1 모형별 VaR 측정 및 검증

단일변량모형이나 다변량모형을 추정하기 위해서는 과거 자료를 필요로 한다. 따라서 사후검증을 수행하기 위해서는 그 기간에 앞서 적절한 길이의 추정윈도우가 설정될 수 있어야 한다. 본 연구에서는 추정윈도우의 길이를 500으로, 사후검증 기간은 1991년 9월 17일부터 2007년 12월 28일(총 4,357거래일)로 정하였다. 추정윈도우는 사후검증을 일별로 순차적으로 행하면서 마찬가지로 일별로 이동해 주어야 한다.

단일변량모형은 포트폴리오 각 구성 종목의 증감률에 관한 정보를 필요로 하지 않는다. 일별로 동일 가중 또는 시가 가중 포트폴리오 가치 그 자체의 증감율에 대한 정보만 있으면 VaR을 산출할 수 있다. 반면 다변량모형을 이용하려면 포트폴리오를 구성하는 각 개별종목에 대한 증감율 정보가 있어야 한다. 이러한 증감율의 다변량 시계열로부터 분산-공분산 행렬(본 연구에서는  $20 \times 20$  행렬)을 추론하고 이에 앞뒤로 적절히 가중치 벡터를 곱하면 포트폴리오 증감율의 분산이 나오므로 이로부터 VaR을 산출할 수 있다.

$t$ 기에서  $(t+1)$ 기 VaR을 예측하고, 실제  $(t+1)$ 기에서 손실이 VaR을 넘어서면 1, 그렇지 않으면 0이 되는 실현함수의 값을 사후검증 기간 내에서 기록하고, 이 실현된 수열을 대상으로 조건부적 위험흡수성 여부를 판단한다.

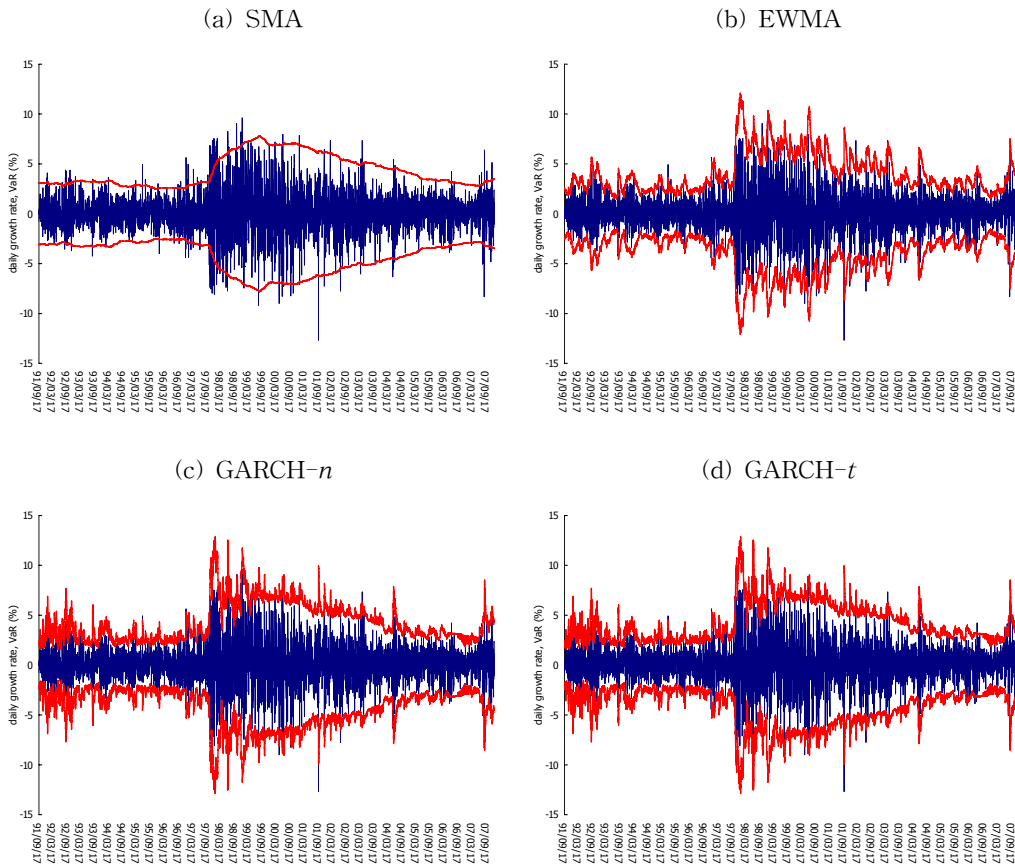
## 6.2 성과분석

본 연구에서는 모형별 VaR 추정시 성과 비교를 위한 사후검증을 신뢰수준 99% VaR과 신뢰수준 99.5% VaR에 대해서 수행하였다. 사후검증 기간이 총 4,357거래일이므로 기대되는 실제 손실이 예측 VaR을 초과하는 횟수가 99% VaR의 경우 약 44(= 4,358

×1%)회, 99.5% VaR의 경우 약 22(= 4,358×0.5%)회이다. <Figure 5> 및 <Figure 6>에는 동일 가중 포트폴리오 증감율과 우측 꼬리 및 좌측 꼬리 99% VaR 및 99.5% VaR을 나타냈다.<sup>18)</sup> <Table 2>와 <Table 3>에는 동일 가중 포트폴리오의 VaR 추정 성과에 대한 검정 결과를 나타냈고, <Table 4>와 <Table 5>에는 시가 가중 포트폴리오의 VaR 추정 성과에 대한 검정 결과를 나타냈다.

Figure 5. 99% VaR estimates and the growth rate of hypothetical equally-weighted portfolio

Each figure represents the daily growth rates of hypothetical equally-weighted portfolio and estimated 99% VaRs for each model.



18) 시가 가중 포트폴리오에도 대해서도 이와 같은 그림을 보일 수 있으나, <Figure 5> 및 <Figure 6>보다 특별히 추가적인 정보를 담고 있지 않으면서 많은 지면을 차지하기에 이는 생략하였다.

단일변량모형과 다변량모형의 포트폴리오 VaR 추정 성과

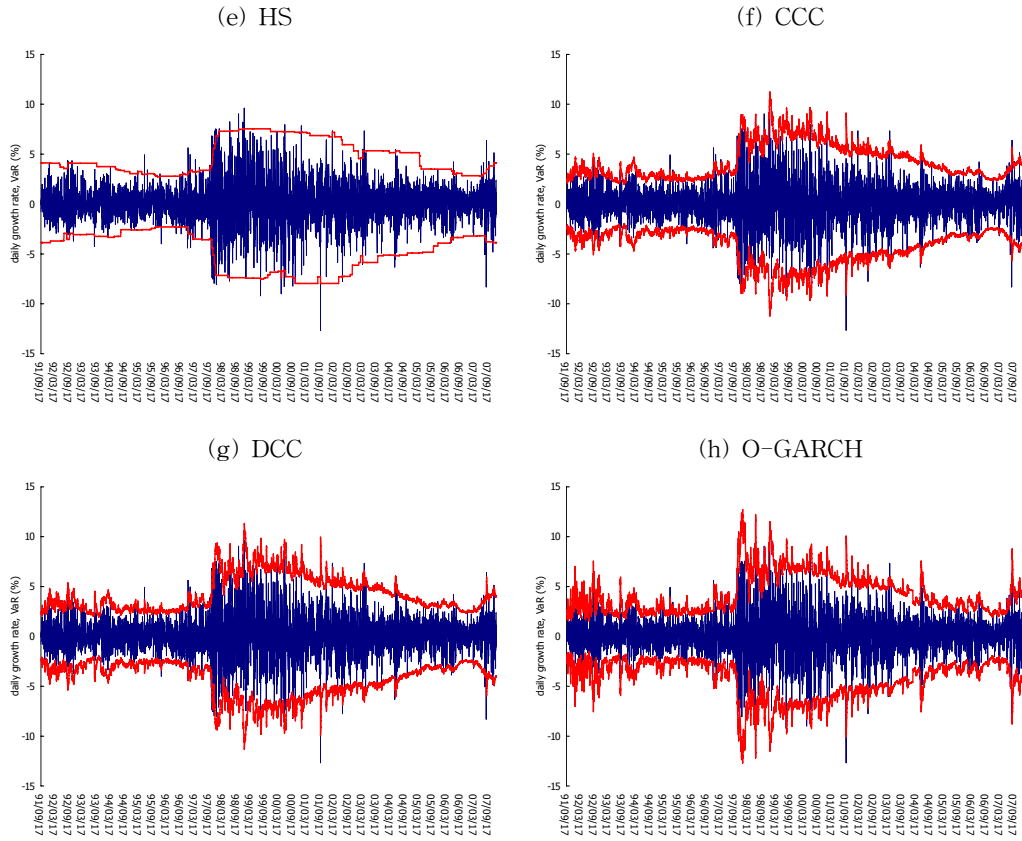
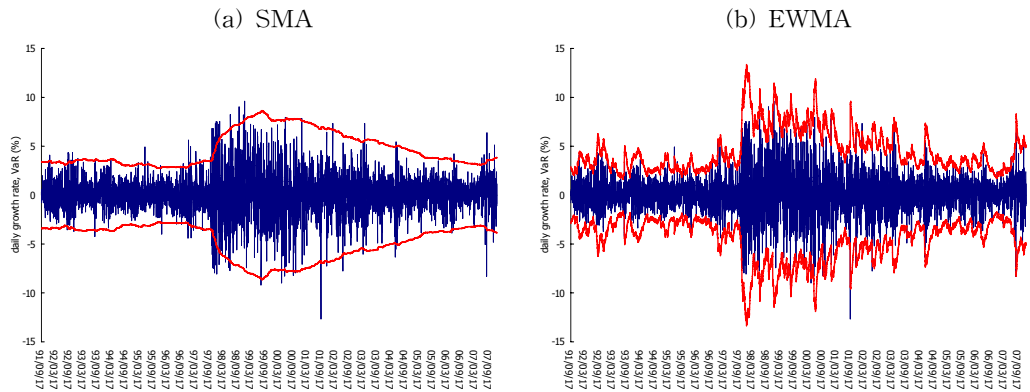
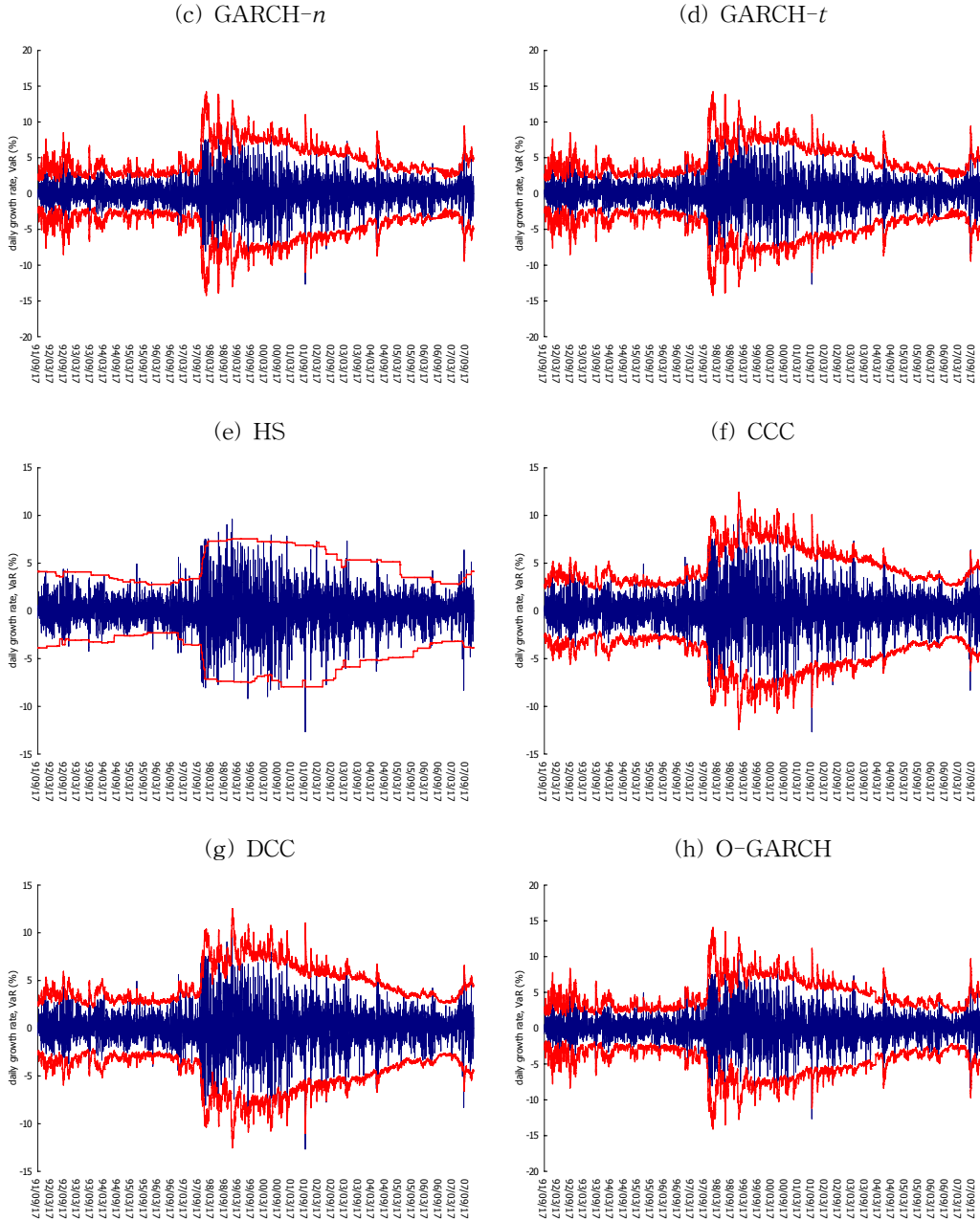


Figure 6. 99.5% VaR estimates and the growth rate of hypothetical equally-weighted portfolio

Each figure represents the daily growth rates of hypothetical equally-weighted portfolio and estimated 99.5% VaRs for each model.





<Table 2>에서 보듯 동일 가중 포트폴리오의 99% VaR 측정에서 매수포지션의 경우 SMA 모형, EWMA 모형, HS 모형을 제외하고 GARCH- $n$  모형, GARCH- $t$  모형, CCC 모형, DCC 모형, O-GARCH 모형이 어떠한 통상적인 유의수준하에서도 조건부적

위험흡수성 검정을 통과(해당 모형이 조건부적 위험흡수성을 지녀 VaR 측정에 적합하다는 귀무가설을 기각하지 못함)하여 좋은 성과를 보였다. 다음으로 99% VaR 측정에서 매도포지션의 경우 CCC 모형, DCC 모형만이 통상적인 어떠한 유의수준하에서도 조건부적 위험흡수성 검정을 통과했다.<sup>19)</sup> 결론적으로 두가지 포지션을 모두 고려한다면 CCC 모형, DCC 모형만이 신뢰수준 99% VaR 측정에 적합하다고 판단된다.

Table 2. Test results for the performance of estimating 99% VaR for the hypothetical equally-weighted portfolio

	models		# of loss greater than VaR	Unconditional coverage test	Independence test	Conditional coverage test
				$LR_{uc}$ [ $p$ -value]	$LR_{ind}$ [ $p$ -value]	$LR_{cc}$ [ $p$ -value]
left tail (long position)	univariate model	SMA	76	***19.95 [0.0000]	***25.18 [0.0000]	***45.13 [0.0000]
		EWMA	61	**6.26 [0.0123]	0.02 [0.8762]	**6.29 [0.0431]
		GARCH- $n$	50	0.92 [0.3388]	0.27 [0.6062]	1.18 [0.5541]
		GARCH- $t$	55	*2.80 [0.0945]	0.12 [0.7273]	2.92 [0.2325]
		HS	52	1.55 [0.2129]	***12.88 [0.0003]	***14.43 [0.0007]
	multivariate model	CCC	54	2.34 [0.1258]	0.15 [0.7027]	2.49 [0.2880]
		DCC	52	1.55 [0.2129]	0.20 [0.6541]	1.75 [0.4164]
		O-GARCH	53	1.93 [0.1649]	0.17 [0.6783]	2.10 [0.3499]
	right tail (short position)	univariate model	SMA	87	***33.91 [0.0000]	***24.18 [0.0000]
EWMA			61	**6.26 [0.0123]	*3.40 [0.0651]	***9.67 [0.0080]
GARCH- $n$			52	1.55 [0.2129]	**4.92 [0.0266]	**6.47 [0.0393]
GARCH- $t$			52	1.55 [0.2129]	**4.92 [0.0266]	**6.47 [0.0393]
HS			51	1.21 [0.2707]	***13.24 [0.0003]	***14.46 [0.0007]
multivariate model		CCC	49	0.66 [0.4176]	0.30 [0.5826]	0.96 [0.6190]
		DCC	47	0.27 [0.6061]	2.60 [0.1068]	2.87 [0.2386]
		O-GARCH	56	*3.29 [0.0699]	***7.56 [0.0060]	***10.85 [0.0044]

Note: a) The null of the above all tests is that the model is appropriate for estimating VaR.  
 b) The figures in the bracket [ ] represent  $p$ -value.  
 c) \*, \*\* and \*\*\* imply the rejection the null with significance level 1%, 5% and 10% respectively.

동일 가중 포트폴리오의 99.5% VaR 측정 성과를 살펴보자. <Table 3>에 그 결과를 제시하였다. 표에서 보듯 매수포지션의 경우 모든 모형이 10% 유의수준에서 기각된다.

19) 검정을 통과했다는 표현을 정확히 하자면, ‘조건부적 예측성 검정의 귀무가설이 기각되지 않았다’이다. 귀무가설은 해당 모형이 VaR 측정에 적합하다는 것이다. 따라서 기존 문헌에서도 해당 모형이 검정을 ‘통과하였다(pass)’고 표현하고 있어 본 연구에서도 이를 따른 것이다.

하지만 5% 유의수준에서는 GARCH- $n$  모형과 O-GARCH 모형이 검정을 통과한다. 매도포지션의 경우 5% 유의수준에서는 모든 모형이 기각된다. 하지만 1% 유의수준에서는 HS, CCC 모형, DCC 모형이 검정을 통과한다.  $p$ -값을 기준으로 각 모형이 VaR 추정모형으로서의 적합성을 기각하는 정도를 가늠해 볼 수 있다. 즉,  $p$ -값이 작을수록 더욱 강하게 귀무가설을 기각하는 것이다. 이렇게 볼 때, 매도·매수 두 포지션에서 공통적으로  $p$ -값이 다른 모형에 비해 상대적으로 높은 모형이 CCC 모형과 DCC 모형이다.

Table 3. Test results for the performance of estimating 99.5% VaR for hypothetical equally-weighted portfolio

	models		# of loss greater than VaR	Unconditional coverage test	Independence test	Conditional coverage test
				$LR_{uc}$ [ $p$ -value]	$LR_{ind}$ [ $p$ -value]	$LR_{cc}$ [ $p$ -value]
left tail (long position)	univariate model	SMA	53	***32.04 [0.0000]	***17.20 [0.0000]	***49.23 [0.0000]
		EWMA	38	***9.91 [0.0016]	0.90 [0.3441]	***10.81 [0.0045]
		GARCH- $n$	32	**4.20 [0.0404]	1.40 [0.2362]	*5.61 [0.0606]
		GARCH- $t$	38	***9.91 [0.0016]	0.90 [0.3441]	***10.81 [0.0045]
		HS	28	1.63 [0.2012]	***11.84 [0.0006]	***13.47 [0.0012]
	multivariate model	CCC	34	**5.87 [0.0154]	1.22 [0.2701]	**7.09 [0.0289]
		DCC	33	**5.01 [0.0252]	1.31 [0.2529]	**6.32 [0.0425]
		O-GARCH	32	**4.20 [0.0404]	1.40 [0.2362]	*5.61 [0.0606]
	right tail (short position)	univariate model	SMA	55	***35.70 [0.0000]	***11.84 [0.0006]
EWMA			45	***18.98 [0.0000]	**6.41 [0.0113]	***25.40 [0.0000]
GARCH- $n$			34	**5.87 [0.0154]	**4.79 [0.0286]	***10.67 [0.0048]
GARCH- $t$			34	**5.87 [0.0154]	***9.54 [0.0020]	***15.41 [0.0004]
HS			31	*3.46 [0.0628]	**5.47 [0.0193]	**8.93 [0.0115]
multivariate model		CCC	35	***6.80 [0.0091]	1.13 [0.2878]	**7.93 [0.0190]
		DCC	33	**5.01 [0.0252]	1.31 [0.2529]	**6.32 [0.0425]
		O-GARCH	35	***6.80 [0.0091]	**4.58 [0.0323]	***11.38 [0.0034]

Note: a) The null of the above all tests is that the model is appropriate for estimating VaR.  
 b) The figures in the bracket [ ] represent  $p$ -value.  
 c) \*, \*\* and \*\*\* imply the rejection the null with significance level 1%, 5% and 10% respectively.

하지만 99.5% VaR 추정에서 정도의 차이는 있기는 하나 CCC 모형과 DCC 모형이 다른 모형에 비해 상대적으로 나을 뿐이지, 검정 통계치의  $p$ -값 수준을 볼 때 이들 모형이 99.5% VaR 추정에 적합하다고 말하기 어렵다. 이들 모형에서  $LR_{cc}$  통계치를  $LR_{uc}$

와  $LR_{ind}$ 로 분해해 보면,  $LR_{uc}$ 가 매우 유의하다. 이들 모형에서 뿐만 아니라 다른 모형에서도 대부분  $LR_{uc}$ 는 매우 유의하다. 이는 실제 손실이 VaR 측정치를 초과하는 횟수가 기대되는 횟수보다 너무 많다는 것을 의미한다. 신뢰수준 99.5% VaR은 포트폴리오 수익률의 극단적 꼬리 부분을 묘사하는 것이다. 99% VaR에서는 크게 두드러지지 않았던 문제가 더욱 꼬리쪽으로 가면서 99.5% VaR에서는 부각되는 것이다. 결국 자산수익률 분포의 특성인 두터운 꼬리(fat tail)를 잘 묘사하는 모형을 찾기가 어렵다. CCC 모형이나 DCC 모형도 정규분포에 근거(normality assumption)하는 것이 99.5% VaR 측정의 한계가 될 수 있다. 그렇다고 다른 종류의 확률분포를 도입하여 모형의 VaR 측정 성과를 개선하는 것도 그리 쉬운 일은 아니다. 예를 들어, GARCH- $n$  모형이 두터운 꼬리를 잘 묘사하지 못한다하여 GARCH- $t$  모형이 도입되어 사용된다. 하지만, <Table

Table 4. Test results for the performance of estimating 99% VaR for hypothetical value-weighted portfolio

	models		# of loss greater than VaR	Unconditional coverage test	Independence test	Conditional coverage test
				$LR_{uc}$ [ $p$ -value]	$LR_{ind}$ [ $p$ -value]	$LR_{cc}$ [ $p$ -value]
left tail (long position)	univariate model	SMA	74	***17.75 [0.0000]	***26.20 [0.0000]	***43.95 [0.0000]
		EWMA	55	*2.80 [0.0945]	0.12 [0.7273]	2.92 [0.2325]
		GARCH- $n$	53	1.93 [0.1649]	**4.73 [0.0296]	**6.66 [0.0358]
		GARCH- $t$	58	**4.37 [0.0365]	***10.87 [0.0010]	***15.24 [0.0005]
		HS	47	0.27 [0.6061]	***20.02 [0.0000]	***20.29 [0.0000]
	multivariate model	CCC	50	0.92 [0.3388]	**5.31 [0.0211]	**6.23 [0.0444]
		DCC	51	1.21 [0.2707]	2.11 [0.1465]	3.32 [0.1899]
		O-GARCH	50	0.92 [0.3388]	**5.31 [0.0211]	**6.23 [0.0444]
	right tail (short position)	univariate model	SMA	76	***19.95 [0.0000]	***9.37 [0.0022]
EWMA			67	***10.93 [0.0009]	2.09 [0.1479]	***13.02 [0.0015]
GARCH- $n$			55	*2.80 [0.0945]	1.41 [0.2356]	4.20 [0.1223]
GARCH- $t$			54	2.34 [0.1258]	0.15 [0.7027]	2.49 [0.2880]
HS			45	0.05 [0.8285]	*2.87 [0.0900]	2.92 [0.2321]
multivariate model		CCC	55	*2.80 [0.0945]	1.68 [0.1944]	4.48 [0.1065]
		DCC	49	0.66 [0.4176]	1.12 [0.2910]	1.77 [0.4123]
		O-GARCH	58	**4.37 [0.0365]	1.40 [0.2360]	*5.78 [0.0557]

Note: a) The null of the above all tests is that the model is appropriate for estimating VaR.  
 b) The figures in the bracket [ ] represent  $p$ -value.  
 c) \*, \*\* and \*\*\* imply the rejection the null with significance level 1%, 5% and 10% respectively.

2> 및 <Table 3>에서 보듯 GARCH-*t* 모형이 GARCH-*n* 모형에 비해 VaR 측정에 더욱 낫다는 증거는 없다. *p*-값을 기준으로 본다면 오히려 GARCH-*t* 모형이 GARCH-*n* 모형에 비해 열등하다고 판단된다.

다음으로 <Table 4> 및 <Table 5>의 시가 가중 포트폴리오에 대한 각 모형별 VaR 측정 성과를 살펴보자. 그 결과는 동일 가중 포트폴리오 VaR 측정 성과와 질적으로 크게 다르지 않다. 시가 가중 포트폴리오에서는 VaR 측정 모형으로서 DCC 모형의 우수성이 더욱 부각된다. 동일 가중 포트폴리오에서의 결과와 크게 다른 점이 있다면, 동일 가중 포트폴리오에서는 99.5% VaR 측정 모형으로 특별히 적합한 모형을 찾기 어려웠지만, 시가 가중 포트폴리오에서는 99% VaR이나 99.5% VaR 모두에서 DCC 모형의 적합성을 기각할 수 없었다.

Table 5. Test results for the performance of estimating 99.5% VaR for hypothetical value-weighted portfolio

	models		# of loss greater than VaR	Unconditional coverage test	Independence test	Conditional coverage test
				$LR_{uc}$ [ <i>p</i> -value]	$LR_{ind}$ [ <i>p</i> -value]	$LR_{cc}$ [ <i>p</i> -value]
left tail (long position)	univariate model	SMA	47	***22.00 [0.0000]	***14.80 [0.0001]	***36.80 [0.0000]
		EWMA	40	***12.26 [0.0005]	0.74 [0.3892]	***13.00 [0.0015]
		GARCH- <i>n</i>	29	2.17 [0.1403]	1.72 [0.1895]	3.90 [0.1426]
		GARCH- <i>t</i>	33	**5.01 [0.0252]	**5.01 [0.0252]	***10.02 [0.0067]
		HS	32	**4.20 [0.0404]	***10.25 [0.0014]	***14.45 [0.0007]
	multivariate model	CCC	28	1.63 [0.2012]	1.84 [0.1751]	3.47 [0.1762]
		DCC	29	2.17 [0.1403]	1.72 [0.1895]	3.90 [0.1426]
		O-GARCH	29	2.17 [0.1403]	1.72 [0.1895]	3.90 [0.1426]
	right tail (short position)	univariate model	SMA	56	***37.58 [0.0000]	***15.93 [0.0001]
EWMA			48	***23.57 [0.0000]	1.07 [0.3010]	***24.64 [0.0000]
GARCH- <i>n</i>			37	***8.82 [0.0030]	0.63 [0.4259]	***9.45 [0.0088]
GARCH- <i>t</i>			32	**4.20 [0.0404]	0.47 [0.4913]	*4.68 [0.0965]
HS			31	*3.46 [0.0628]	**5.47 [0.0193]	**8.93 [0.0115]
multivariate model		CCC	37	***8.82 [0.0030]	0.63 [0.4259]	***9.45 [0.0088]
		DCC	27	1.17 [0.2803]	0.34 [0.5617]	1.50 [0.4718]
		O-GARCH	36	***7.78 [0.0053]	0.60 [0.4386]	**8.38 [0.0151]

Note: a) The null of the above all tests is that the model is appropriate for estimating VaR.  
 b) The figures in the bracket [ ] represent *p*-value.  
 c) \*, \*\* and \*\*\* imply the rejection the null with significance level 1%, 5% and 10% respectively.

### 6.3 결과 해석

모형별 99% VaR 측정 성과 및 99.5% VaR 측정 성과를 바탕으로 다음과 같은 사실을 발견할 수 있다. 첫째, VaR 측정에 있어 다변량모형이 단일변량모형에 비해 우수하다. 동일 가중 또는 시가 가중 포트폴리오의 우측·좌측 꼬리에 대한 99% VaR, 99.5% VaR를 모두 종합적으로 고려할 때, 단일변량모형에 비해 다변량모형이 모형의 적합성을 기각하지 않거나, 기각하더라도 상대적으로 그 기각의 강도가 약하다.

둘째, 다변량모형 중 동적 공분산을 반영하는 DCC 모형이 VaR 측정에 있어 다른 다변량모형에 비해 우수하다. 즉, 다른 다변량모형에 비해 모형의 적합성을 기각하지 않거나, 기각하더라도 그 강도가 약하다. O-GARCH 모형에 비해 CCC 모형과 DCC 모형은 우수한 편이며,  $p$ -값 기준으로 볼 때 DCC 모형과 CCC 모형 중 전자가 더 낫다고 할 수 있다. 특히, 손실의 VaR 초과 횟수에 있어 DCC 모형은 VaR의 신뢰수준 및 좌우측 꼬리에 무관하게 안정적으로 기대 횟수에 근접한 횟수를 나타낸다.<sup>20)</sup>

셋째, 국내 금융기관들이 실무에서 자주 사용하는 모형인 SMA 모형과 HS는 어느 경우에도 강하게 모형의 적합성을 기각하여 적합한 모형으로 채택되지 못하였다. SMA 모형이 기타 모형에 비해 VaR 측정 성과가 열등한 것은 Sarma et al.(2003), 이준형(2000) 등 다른 연구와 일관된다. HS와 관련하여 주목할 사실은 HS는 무조건적 위험흡수성 성과는 비교적 크게 나쁘지 않으나, 독립성 검정 성과는 매우 나쁘다는 것이다. 이는 HS가 과거의 경험에만 근거하여 비모수적으로 VaR를 계산한다는 사실과 주식수익률 변동성의 일반적 특성인 변동성 군집 현상을 고려한다면 당연한 결과라 할 수 있다. 예를 들어, 과거 100개 관측치에 근거하여 신뢰수준 95% VaR를 측정하는 HS는 과거 가장 좋지 않았던 경험 중 5번째로 좋지 않은 경험을 VaR 예측치로 사용한다. 이 때 현재 시점에서 과거 100개 관측치에서는 경험하지 못한 변동성 군집이 발생하여 포트

20) VaR 산출 모형이 초과 횟수가 적다는 것은 금융기관에게 실무적으로 중대한 의미가 있다. 내부모형에 의하여 시장리스크를 측정하는 금융기관은 내부모형의 사후검증 결과에 따라서 준비 자본량의 크기가 달라지기 때문이다. 우리나라에서는 금융감독원의 「은행업감독업무시행세칙」 <별표 3-2>에 은행의 시장리스크에 대한 규제 자본량 산출 방법을 규정하고 있다. 동 규정에 따르면 내부모형에 의한 시장리스크 소요자본량은 다음과 같이 계산된다.

$$\max \left[ \text{Var}_{t-1}, (3+\alpha) \cdot \left( \frac{\sum_{p=1}^{60} \text{VaR}_{t-p}}{60} \right) \right]$$

여기서  $\alpha$ 는 부가승수로 내부모형의 사후검증 결과 초과횟수의 단조증가함수이다(초과 횟수에 따른 부가승수  $\alpha$ 의 값은 동 규정 참조). 따라서 사후검증 결과 초과 횟수가 많을수록 더 많은 준비 자본을 쌓아하며 이는 은행의 입장에서는 더 큰 비용을 감수하게 된다.

폴리오 수익률이 며칠간 지속적으로 악화되는 상황을 고려해보자. 이런 상황을 HS가 VaR 측정치에 반영하기 위해서는 해당 시기에 5번 이상의 손실이 필요하다. 즉, 5번까지 지속적으로 초과횟수가 집중되는 것이다. 이러한 초과횟수의 집중은 HS가 현재의 새로운 정보를 효율적으로 반영하지 못한다는 것을 의미하며, 이는 독립성 검정에 의해서 기각되는 결과를 초래한다. 이러한 현상은 <Figure 5>에서도 확인할 수 있다. IMF 경제위기 시기에 변동성이 급증하여 변동성 군집이 발생하면서 포트폴리오증감율이 지속적으로 HS에 의한 좌측 VaR 추정치를 넘어서는 것을 관측할 수 있다.

## 7. 결론

본 논문에서는 포트폴리오 VaR 측정을 위해 사용되는 다양한 단일변량모형 및 다변량모형의 VaR 측정 성과를 비교·분석하였다. 모형별 VaR 측정 성과를 분석하기 위해 한국 유가증권시장 시가 상위 20종목으로 구성된 가상적인 동일 가중 또는 시가 가중 포트폴리오의 매도·매수 포지션에 대해서 신뢰수준 99% VaR 및 신뢰수준 99.5% VaR를 측정하였고, Christoffersen(1998)에 따라 실제 손실의 VaR 초과 횟수의 적정성 및 이러한 초과 발생의 독립성을 동시에 고려하여 검증하였다.

본 연구에서 고려한 모형은 단일변량모형으로서 SMA 모형, EWMA 모형, GARCH- $n$  모형, GARCH- $t$  모형 및 HS와 다변량모형으로서 CCC 모형, DCC 모형, O-GARCH 모형이다. 분석 결과, 다변량모형인 DCC 모형 및 CCC 모형이 단일변량모형에 비해서 VaR 측정에 있어 우수한 성과를 보이며, 이 중에서 동적 공분산을 반영하는 DCC 모형이 더욱 우월한 모형인 것으로 판단된다. 또한 무엇보다도 DCC 모형은 손실의 VaR 초과 횟수 측면에서 비교적 견고하게 기대횟수와 가까운 모형인 것으로 나타났다. 이는 개별 주식간 상관관계가 증가할수록 시장변동성이 증가한다는 Longin and Solnik(1995)의 연구 결과에 비추어 볼 때, 개별 종목간 동적 공분산을 고려한 포트폴리오의 VaR을 추정하는 DCC 모형이 타 모형에 비해 우수한 것은 당연한 결과일 수 있다.

본 연구는 수익률의 분포가 좌우 대칭인 선형자산으로서 주식만을 고려하였다. 하지만, 금융회사의 포트폴리오에는 비선형 자산인 파생금융상품도 다수 포함되어 있으므로, 포트폴리오에 비선형 자산이 포함되었을 때 어떤 모형이 VaR 측정에 유용한가를 살펴보는 것도 매우 의미있고 흥미로운 과제이다. 하지만, 이는 향후 연구로 남기도록 한다.

## 참 고 문 헌

- 문성주, 이덕창, 김대호, 오세경, “극단치이론을 이용한 VaR의 추정 및 성과”, 증권학회지, 제32권 제3호(2003), pp. 223-268.  
(Translated in English) Moon, Seong Ju, Deok Chang Lee, Dae Ho Kim, and Se Kyung Oh, 2003, Estimation and Performance of VaR using Extreme Value Theory, *Asia-Pacific Journal of Financial Studies* 32 (3), pp. 223-268.
- 유일성, 이유태, “VaR을 이용한 금융위험 측정”, 재무관리논총, 제10권 제1호(2004), pp. 191-214.  
(Translated in English) Yu, Il Sung and Yu Tae Lee, 2004, Measurement of Financial Risk Using VaR, *The Korean Journal of Financial Studies* 10 (1), pp. 191-214.
- 이근영, “VaR 모형의 예측성과 비교”, 금융학회지, 제11권 제4호(2006), pp. 127-168.  
(Translated in English) Lee, Keun Yeong, 2006, A Comparison of the Out-of-Sample Performance of VaR Models, *Korean Journal of Money and Finance* 11 (4), pp. 127-168.
- 이준행, “VaR 측정치의 백테스트와 VaR 모형의 적정성 평가”, 선물연구, 제8권(2000), pp. 81-106.  
(Translated in English) Lee, Joon Hang, 2000, Backtesting of VaR estimates and evaluation for VaR model, *Korean Journal of Futures and Options* 8, pp. 81-106.
- 조담, “주식의 변동성 추정방법이 VaR에 미치는 영향”, 선물연구, 제12권 제2호(2004), pp. 1-24.  
(Translated in English) Cho, Dam, 2004, The Effects of Estimation Methods of Stock Price Volatility on VaR, *Korean Journal of Futures and Options* 12 (2), pp. 1-24.
- 한상범, “극치분포를 이용한 VaR의 추정 및 성과분석”, 금융연구, 제13권 제2호(1999), pp. 319-341.

(Translated in English) Hahn, Sang-Buhm, 1999, The Evaluation for estimating VaR using extreme value distribution, *Review of Financial Economics* 13 (2), pp. 319-341.

Alexander, C., *Market Models*, John Wiley and Sons, 2001.

Angelidis, T. and A. Benos, 2004, Value-at-Risk for Greek Stocks, Working Paper, Department of Banking and Financial Management, University of Piraeus.

Bauwens, L., S. Laurent, and J. V. K. Rombouts, 2006, Multivariate GARCH Model: A Survey, *Journal of Applied Econometrics* 21, pp. 79-109.

Bedder, T., 1995, VaR: Seductive but Dangerous, *Financial Analysts Journal* 51, pp. 12-24.

Bollerslev, T., 1986, Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics* 31, pp. 307-327.

Bollerslev, T., 1990, Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: a multivariate generalized ARCH approach, *Review of Economics and Statistics* 72, pp. 498-505.

Brooks, C. and G. Persaud, 2003, The Effect of Asymmetries on Stock Index Return Value-at-Risk Estimates, *Journal of Risk Finance* 4, pp. 29-42.

Campbell, Sean D., 2005, A Review of Backtesting and Backtesting Procedures, Working Paper, Finance and Economics Discussion Series 2005-21, Board of Governors of the Federal Reserve System.

Christoffersen, P. F., 1998, Evaluating Interval Forecasts, *International Economic Review* 39, pp. 841-862.

Engle, R. F., 2002, Dynamic Conditional Correlation: A Simple Class of Multivariate GARCH Models, *Journal of Business and Economic Statistics* 20, pp. 339-350.

Engle, R. F. and K. Sheppard, 2001, Theoretical and Empirical Properties of Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH, NBER Working Papers 8554, NBER.

Geary, R. C., 1970, Relative Efficiency of Count of Sign Changes for Assessing Residual Autoregression in Least Squares Regression, *Biometrika* 57, pp. 123-127.

- Hendricks, D., 1996, Evaluation of Value-at-Risk Models Using Historical Data, *FRBNY Economic Policy Review* 2, pp. 39-69.
- Jorion, P., Value at Risk: *The New Benchmark for Managing Financial Risk*, 2nd ed., McGraw-Hill, 2000.
- Kupiec, P. H., 1995, Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models, *Journal of Derivatives* 3, pp. 73-84.
- Longin, F. and B. Solnik, 1995, Is the Correlation in International Equity Returns Constant: 1960~1990?, *Journal of International Money and Finance* 14, pp. 3-26.
- Lopez, J. A. and C. A. Walter, 2000, Evaluating Covariance Matrix Forecasts in a Value-at-Risk Framework, Working Papers in Applied Economic Theory, Federal Reserve Bank of San Francisco.
- Manfredo, M. R. and R. M. Leuthold, 1999, Measuring Market Risk of the Cattle Feeding Margin: An Application of Value-at-Risk Analysis, presented in American Agricultural Economics Association Meetings 1999.
- Rombouts, J. and M. Verbeek, 2004, Evaluating Portfolio Value-At-Risk Using Semi-Parametric GARCH Models, Unpublished Manuscript, ERIM Report Series.
- Sarma, M., S. Thomas, and A. Shah, 2003, Selection of Value-at-Risk Models, *Journal of Forecasting* 22, pp. 337-358.
- Tse, Y. K. and A. K. C. Tsui, 2002, A multivariate GARCH model with time-varying correlations, *Journal of Business and Economic Statistics* 20, pp. 351-362.